Capitulation des noyaux sauvages étales

Romain Validire

UNIVERSITÉ DE LIMOGES

ÉCOLE DOCTORALE Science-Technologie-Santé

FACULTÉ des Sciences et Techniques

Département Mathématiques et Informatique, Laboratoire XLIM

Thèse

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LIMOGES
Discipline : Mathématiques

Présentée et soutenue par

Romain VALIDIRE

le 24 Juin 2008

Capitulation des noyaux sauvages étales

Thèse codirigée par Jean-François Jaulent et Abbas Movahhedi.

Jury

Rapporteurs :	Manfred KOLSTER
	Professeur à McMaster University (Hamilton, Canada)
	Thong NGUYEN QUANG DO
	Professeur à l'université de Franche-Comté
Examinateurs :	Jean-François JAULENT
	Professeur à l'université de Bordeaux 1
	Thierry LAMBRE
	Professeur à l'université Blaise Pascal
	François LAUBIE
	Professeur à l'université de Limoges
	Abbas MOVAHHEDI
	Professeur à l'université de Limoges
	Alain SALINIER
	Maître de conférences HDR à l'université de Limoges

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier vivement mes directeurs de thèse Abbas Movahhedi et Jean-François Jaulent pour le soutien et la confiance qu'ils m'ont accordés durant ce travail de thèse.
Je tiens également à exprimer ma profonde gratitude à Thong Nguyen Quang Do, qui a accepté d'être rapporteur, et dont les nombreuses suggestions et pistes de travail m'ont accompagné tout au long de ces années de thèse.
Je souhaite remercier très chaleureusement Manfred Kolster, également rapporteur, pour son écoute et l'intérêt qu'il a porté à mon travail. Je suis aussi profondément reconnaissant de son hospitatilité lors de mon séjour à Hamilton au Canada entre Septembre et Décembre 2006.
Mes remerciements s'adressent également à Thierry Lambre, François Laubie et Alain Salinier qui ont accepté de faire partie de mon jury.

Je profite de l'occasion pour remercier tous les membres du DMI. Ces remerciements s'adressent en particulier à Aurélie Doucet, à Sylvie Laval, Henri Massias, Patricia Vareille et Yolande Vieceli pour leur disponibilité et leur soutien logistique. Je salue également Stéphane Vinatier (auprès duquel je suis redevable de tant de séminaires enrichissants) et tous les doctorants du bâtiment de Maths, avec une mention spéciale à ceux de mon bureau, Adrien, Samuel, Sandrine et Daouda ainsi qu'à Pierre-Louis (qui a tellement insisté) et Matthias pour ces conseils de présoutenance.

Je souhaite enfin exprimer ma gratitude à ma chérie, Céline, pour sa tendresse et la confiance qu'elle m'a toujours portée. Je remercie également Timothée pour son soutien dans les moments d'intense travail comme dans les moments de détente. Je remercie aussi mon éminent collègue de théorie des nombres Clément, ainsi que Jean-Marie pour sa disponibilité. Enfin, je remercie ma mère, ma soeur, toute ma famille et ma belle-famille pour leur soutien constant.

Table des matières

Introduction

Le contexte de cette thèse est celui des corps de nombres, i.e. des extensions finies du corps $\mathbb{Q}$ des rationnels. On y étudie deux problèmes distincts :

– la structure des groupes de la K-théorie des anneaux d'entiers des corps de nombres : on généralise un théorème de M. Grandet et J.-F. Jaulent sur la structure des groupes de classes dans une $\mathbb{Z}_p$-extension, aux groupes pairs de la K-théorie supérieure ;
– la structure de certains groupes de Galois de pro-p-extensions de corps de nombres à ramification restreinte : on donne une caractérisation de la pro-p-liberté du groupe de Galois $\mathcal{G}'_\infty := \mathrm{Gal}(\mathcal{L}'_\infty/F_\infty)$, où F_∞/F est la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique d'un corps de nombres F et $\mathcal{L}'_\infty$ la pro-p-extension non-ramifiée, $p\infty$-décomposée maximale de F_∞. En abrégé, on dit que $\mathcal{L}'_\infty$ est la pro-p-extension *localement cyclotomique* maximale de F.

Bien que ces deux problèmes soient de nature a priori différente, ils sont reliés à l'étude des *noyaux de capitulation* de certains noyaux de localisation en cohomologie étale. Considérons un foncteur covariant $\mathcal{K}$ de la catégorie des corps de nombres vers celle des groupes abéliens. D'une manière générale l'étude de la capitulation se présente de la façon suivante : étant donnée une extension de corps de nombres E/F, on s'intéresse au noyau du morphisme :

$$\mathcal{K}(F) \to \mathcal{K}(E),$$

induit par l'inclusion $F \subseteq E$.

L'exemple le plus classique d'un tel foncteur nous est donné par le groupe des classes d'idéaux Cl_F de l'anneau des entiers $\mathcal{O}_F$ de F. Dans ce contexte le noyau de capitulation est le sous-groupe des classes d'idéaux de $\mathcal{O}_F$ devenant principaux dans une extension finie de F. Ce genre de considération remonte au moins au théorème 94 de Hilbert.

Chapitre 1

Dans ce chapitre, on présente les foncteurs K_n, avec $n \geq 0$, de la K-théorie algébrique dont les premiers groupes se décrivent de la manière suivante :

$$K_0(\mathcal{O}_F) \simeq Cl_F \oplus \mathbb{Z} \text{ et } K_1(\mathcal{O}_F) \simeq (\mathcal{O}_F)^{\times}.$$

Pour les K-groupes supérieurs (au sens de Quillen), la philosophie classique est la suivante :
– les K-groupes d'indice *pair* jouent le rôle de groupe de classes ;
– les K-groupes d'indice *impair* jouent le rôle de groupe d'unités.
La K-théorie des anneaux d'entiers est profondément reliée à l'arithmétique des corps de nombres. Fixons un premier p et intéressons-nous à $K_n(\mathcal{O}_F)\otimes\mathbb{Z}_p$. Une conjecture de Quillen et Lichtenbaum permet de décrire ces groupes au moyen de la cohomologie étale (ou galoisienne) du schéma spec$(\mathcal{O}'_F)$ avec $\mathcal{O}'_F = \mathcal{O}_F[1/p]$ (avec des hypothèses sur F, lorsque $p = 2$). C'est essentiellement de ce point de vue que nous nous plaçons dans cette thèse. Les groupes de cohomologie considérés coïncident (c'est un théorème) avec les K-groupes étales $K_n^{ét}(\mathcal{O}'_F)$ introduits par Dwyer-Friedlander ; nous adoptons cette notation.
Enfin, on s'intéresse aux *noyaux sauvages étales* définis comme noyaux de localisation en cohomologie étale et qui s'interprètent classiquement comme des versions "tordues" de la p-partie du p-groupe des classes.

Chapitre 2
Le second chapitre est consacré dans un premier temps à des rappels de théorie d'Iwasawa des $\mathbb{Z}_p$-extensions ; c'est l'outil essentiellement utilisé dans cette thèse. Il s'agit de donner certains résultats sur les Λ-modules, où $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[T]]$ s'identifie à l'algèbre d'Iwasawa.
Dans un second temps, nous faisons le lien entre la théorie d'Iwasawa et les objets introduits dans le premier chapitre. Ce lien se fait au moyen d'un résultat de P. Schneider qui établit un isomorphisme entre les noyaux sauvages étales et le codescendu d'un certain module d'Iwasawa tordu. Nous donnons alors quelques conséquences immédiates (pour la plupart bien connues) de cet isomorphisme.

Chapitre 3
Dans ce chapitre, il s'agit d'obtenir un résultat *asymptotique* sur la structure de groupe abélien des K-groupes pairs supérieurs dans une $\mathbb{Z}_p$-extension : ce résultat est un analogue en K-théorie supérieure d'un théorème de M. Grandet et J.-F. Jaulent (cf. [GJ]). Présentons brièvement ce théorème.
Etant donné un corps de nombres F, déterminer la structure du groupe abélien Cl_F est un problème en général difficile. Depuis les travaux d'Iwasawa, on sait cependant que le comportement de la p-partie du groupe des classes des corps intermédiaires F_n dans une $\mathbb{Z}_p$-extension F_∞/F obéit à des lois bien

précises. On peut citer par exemple le célèbre théorème d'Iwasawa donnant le nombre de classes $h_n := |A_n|$ où $A_n := Cl_{F_n} \otimes \mathbb{Z}_p$:

Théorème 0.0.1. *Il existe des entiers μ, λ et ν tels que pour tout n suffisamment grand :*

$$h_n = p^{\mu p^n + \lambda n + \nu}.$$

Il est possible d'obtenir des résultats encore plus précis au moyen de l'étude des noyaux de capitulation :

$$\mathrm{Cap}_n := \ker(A_n \to A_\infty),$$

avec $A_\infty := \varinjlim(A_m)$, la limite étant prise sur les morphismes d'extension. Ces noyaux ont été particulièrement étudiés (cf. [Iw1], [Ku]...) et leur comportement asymptotique est bien connu. En particulier une conjecture de Greenberg prédit que lorsque F est totalement réel, les groupes A_n et Cap_n sont égaux pour n suffisamment grand.
Posons $X_\infty := \varprojlim A_n$, où la limite est prise sur les morphismes de normes. Ce groupe est un Λ-module de type fini et de torsion ; soient μ (resp. λ) la valuation en p (resp. le degré) de son polynôme caractéristique et X_∞^0 son sous-module fini maximal. Alors les groupes Cap_n se stabilisent (cf [Ku]). Plus précisément pour tout n suffisamment grand la norme de X_∞ vers A_n induit un isomorphisme :

$$X_\infty^0 \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Cap}_n .$$

Par la suite M. Grandet et J.-F. Jaulent ont démontré le résultat suivant :

Théorème 0.0.2. *Supposons que $\mu = 0$. Alors pour tout n suffisamment grand :*
– *le groupe Cap_n est un facteur direct de A_n ;*
– *il existe une famille d'entiers $(\alpha_1, \dots, \alpha_\lambda) \in \mathbb{Z}^\lambda$ telle que*

$$A_n \simeq \mathrm{Cap}_n \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{\lambda} \mathbb{Z}/p^{\alpha_i + n} \right),$$

en tant que groupe abélien.

On s'intéresse naturellement aux groupes de capitulation pour les K-groupes pairs :

$$\mathrm{Cap}_i(F_n) := \ker\left(K_{2i}(\mathcal{O}_{F_n}) \otimes \mathbb{Z}_p \to (K_{2i}(\mathcal{O}_{F_\infty}) \otimes \mathbb{Z}_p)\right).$$

Utilisant un résultat général dû à T. Nguyen Quang Do, B. Kahn a démontré (cf. [Ka]) que pour $i = 1$ et n grand, le groupe $\mathrm{Cap}_1(F_n)$ se stabilise pour la norme. M. Kolster et A. Movahhedi (cf [KM]) ont ensuite généralisé ce résultat aux K-groupes étales supérieurs.
La propriété de stabilisation pour les noyaux de capitulation supérieurs étant acquise, nous montrons que le théorème de Grandet-Jaulent reste vrai pour les K-groupes pairs (poursuivant ainsi l'analogie avec le groupe des classes). Pour cela, après avoir rappelé la notion de co-adjoint et de suite admissible d'un Λ-module, nous montrons le résultat général suivant :

Théorème 0.0.3. *Soit M un Λ-module de type fini satisfaisant les conditions suivantes :*
(a) le module M est de Λ-torsion ;
(b) pour tout $n \geq 0$, le co-invariant M_{Γ_n} est fini ;
(c) $\mu(M) = 0$.
Alors pour tout $n \gg 0$, on a une suite exacte scindée de groupes abéliens

$$0 \to M^0 \to M_{\Gamma_n} \to (\varinjlim M_{\Gamma_n})^{\Gamma_n} \to 0.$$

La surjectivité de la flèche $M_{\Gamma_n} \to (\varinjlim M_{\Gamma_n})^{\Gamma_n}$ est démontrée par M. Le Floc'h, A. Movahhedi et T. Nguyen Quang Do dans [LMN].
On obtient alors le résultat souhaité pour les K-groupes étales en appliquant le théorème précédent au Λ-module :

$$\varprojlim K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_{F_n}^S),$$

où la limite est prise sur les morphismes de normes. Pour terminer ce chapitre, on examine en détail le cas particulier où F_∞/F est la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique.

Chapitre 4 Fixons un corps de nombres F et un premier p (que nous supposons impair). Le but de ce chapitre est de proposer une étude de la *dimension cohomologique* du pro-p-groupe

$$\mathcal{G}' := \mathrm{Gal}(\mathcal{L}'_\infty/F),$$

où $\mathcal{L}'_\infty$ désigne la pro-p-extension localement cyclotomique (ou *logarithmiquement* non ramifiée maximale, dans la terminologie introduite dans [J4]) maximale du corps F.
D'une manière générale, étant donné un ensemble fini S de places de F, l'étude du groupe de Galois $\mathcal{G}_S$ sur F de la pro-p-extension S-ramifiée maximale de F est un problème intéressant. La considération de tels groupes

remonte au moins au problème de la finitude de la tour des corps classes de Hilbert. Ce problème a été résolu par E. Golod et I. Shafarevitch (cf. [GS]) qui ont montré l'existence de corps de nombres F pour lesquels $\mathcal{G}_\emptyset$ est infini.

Plus généralement, la structure de $\mathcal{G}_S$ dépend fortement du fait que S contient ou non l'ensemble S_p des places divisant p. Cela s'illustre bien lorsqu'on s'intéresse à l'abélianisé de $\mathcal{G}_S$:

– si $S \cap S_p = \emptyset$ alors $(\mathcal{G}_S)^{ab}$ est fini.
– si $S_p \subset S$ alors $(\mathcal{G}_S)^{ab}$ est un $\mathbb{Z}_p$-module de type fini de rang d avec l'inegalité :
$$d \geq 1 + r_2,$$
où r_2 désigne le nombre de places complexes de F.

La p-dimension cohomologique des groupes $\mathcal{G}_S$ dépend également de l'ensemble S. Celle-ci a été étudiée par de nombreux auteurs. Lorsque $S_p \subseteq S$, il est connu que $cd_p(\mathcal{G}_S) \leq 2$. Le cas pro-$p$-libre est en lien avec les notions de p-rationalité (cf. [Mo]) et p-régularité ([GrJ]). On dispose de moins de résultats quand S ne contient pas S_p (cf. [Ma]). Le groupe $\mathcal{G}'$ considéré ici n'est pas de la forme $\mathcal{G}_S$ et se situe à "mi-chemin" entre les cas $S \cap S_p$ vide et $S_p \subset S$. Nous posons alors la question suivante :

$$\text{Quand a-t-on } cd(\mathcal{G}') \leq 2\,?$$

C'est à l'aide des noyaux sauvages étales que nous abordons cette question.

L'idée classique est de faire intervenir la théorie d'Iwasawa des $\mathbb{Z}_p$-extensions. L'extension $\mathcal{L}'_\infty/F$ contient la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique F_∞/F (c'est conjecturellement la seule) ; notons Γ son groupe de Galois. On a l'extension de groupes :
$$0 \to \mathcal{G}'_\infty \to \mathcal{G}' \to \Gamma \to 1,$$
et $\mathcal{G}'_\infty$ s'identifie au groupe de Galois sur F_∞ de la pro-p-extension non ramifiée, p-décomposée, maximale de F_∞. Il s'agit alors d'étudier le caractère pro-p-libre éventuel de $\mathcal{G}'_\infty$. Cette question a déja été abordée dans [Wi] ainsi que dans [O] (en fait, les auteurs s'intéressent plus exactement au groupe de Galois $\mathcal{G}_\infty$ de la pro-p-extension non ramifiée maximale de F_∞ ; le groupe $\mathcal{G}'_\infty$ est un quotient de $\mathcal{G}_\infty$).

D'autre part le comportement galoisien des noyaux sauvages étales dans la famille des extensions localement cyclotomiques de F et pour les entiers $i \equiv 0 \bmod [F(\mu_p) : F]$ est assez mystérieux. Par exemple, M. Kolster et A. Movahhedi ont montré que dans ce cas (et seulement dans celui-ci) la norme n'est pas surjective (cf. [KM]). L'étude de la descente galoisienne dans la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique ainsi que les résultats de [JS] et [As] laissent penser que ce comportement est fortement relié à la structure du pro-p-groupe $\mathcal{G}'_\infty$. La caractérisation que nous donnons confirme cette idée :

Théorème 0.0.4. *Soit F un corps de nombres contenant μ_p. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) Le groupe $\mathcal{G}'_\infty$ est pro-p-libre.

(ii) L'invariant μ de X'_∞ est nul et pour toute p-extension L/F localement cyclotomique et tout $i \geq 1$, l'application naturelle d'extension induit un isomorphisme :

$$WK_{2i}^{ét}(F) \xrightarrow{\simeq} WK_{2i}^{ét}(L)^G,$$

avec $G = \mathrm{Gal}(L/F)$.

Notons que cette caractérisation est déjà connue (pour $(i) \Rightarrow (ii)$ cf. [Vau, Proposition 4.5] et pour la réciproque cf. [N3, théorème 3.1]). Nous donnons ici une démonstration de l'équivalence, différente des deux précédentes et qui se base essentiellement sur l'adaptation d'un résultat classique en théorie du corps de classes qui caractérise les groupes de dimension cohomologique stricte égale à 2.

On utilise alors le théorème précédent pour l'étude de $\mathcal{G}'_\infty$. Nous donnons en particulier un critère pour que $\mathcal{G}'_\infty$ soit *pro-p-cyclique*.
L'étude de la structure de $\mathcal{G}'_\infty$ via les noyaux sauvages étales a déja été entreprise dans [As] ; l'auteur s'intéresse à la finitude de $\mathcal{G}'_\infty$. Ces travaux suivent ceux de [JS] (cf. aussi [JM1] et [JM2]) où la finitude de $\mathcal{G}'_\infty$ est reliée à celle de la *tour localement cyclotomique* de F. En particulier, on a le critère suivant (exprimé ici sous une forme simplifiée) lorsque F contient les racines p-ièmes de l'unité :

$$\text{Si } \ \mathrm{rg}_p(WK_2^{ét}(F)) \geq 1 + 2\sqrt{r_2+2} \quad \text{alors} \quad \mathcal{G}'_\infty \text{ n'est pas fini.}$$

Avec le théorème de caractérisation de la pro-p-liberté, nous montrons le critère suivant (qui complète d'une certaine façon le précédent) :

$$\text{Si } \ \mathrm{rg}_p(WK_2^{ét}(F)) \geq 1 + r_2 \quad \text{alors} \quad \mathcal{G}'_\infty \text{ n'est pas pro-}p\text{-libre,}$$

et nous donnons des exemples de corps qui satisfont ce critère. On examine ensuite le cas où le corps F admet une conjugaison complexe.

Supposons que le corps F contient une unique p-place. Le résultat principal de la dernière partie de ce chapitre est la caractérisation suivante :

$$\text{Si } \ \mathrm{rg}_p(\mathrm{Cap}'(L/F)) \geq 2 \quad \text{alors} \quad \mathcal{G}'_\infty \text{ n'est pas pro-}p\text{-libre,}$$

où $\mathrm{Cap}'(L/F)$ désigne le noyau de capitulation du groupe des p-classes d'idéaux de F vers le groupe des p-classes d'idéaux d'une extension L/F non-ramifiée p-décomposée, cyclique de degré p.
Ce critère ouvre en particulier des perspectives algorithmiques. Il s'obtient à l'aide de considérations sur les noyaux de capitulation des groupes des classes logarithmiques.
Nous terminons par des exemples numériques de corps quadratiques imaginaires F, dont le groupe $\mathcal{G}'_\infty$ n'est pas pro-p-libre.

Notations

Dans cette thèse, on adopte les notations suivantes :

n	un entier naturel
A	un $\mathbb{Z}$-module de type fini
${}_nA$	le noyau de la multiplication par n
A/n	le conoyau de la multiplication par n
$A\{n\}$	le sous groupe des éléments de A annulés par n
p	un nombre premier
A	un $\mathbb{Z}_p$-module de type fini
$\mathrm{rg}_p(A)$	le p-rang de A (i.e. $\dim_{\mathbb{F}_p}(A/p)$)
G	un groupe
I_G	l'idéal d'augmentation de G
M	un G-module
M^G	le sous-groupe des invariants de M sous l'action de G
M_G	le groupe des co-invariants sous l'action de G (i.e. le quotient M/I_GM)
F	un corps
F^*	le groupe multiplicatif des éléments non nuls de F
$\mu(F)$	le groupe des racines de l'unité contenues dans F
μ_n	le groupe des racines n-ièmes de l'unité
$[L : F]$	le degré d'une extension finie L/F
$\mathrm{Gal}(L/F)$	le groupe de Galois d'une extension galoisienne L/F

F	un corps de nombres
S	un ensemble de places de F
S_p	l'ensemble des places de F divisant p
S_∞	l'ensemble des places archimédiennes de F
$\mathcal{O}_F^S$	l'anneau des S-entiers de F
F^S	l'extension S-ramifée maximale de F
G_F^S	le groupe $\mathrm{Gal}(F^S/F)$
F_v	le complété de F en une place v
k_v	le corps résiduel de F_v, lorsque v est non complexe
F_∞	une $\mathbb{Z}_p$-extension de F
F_n	le n-ième étage de F_∞/F
Γ_n	le groupe $\mathrm{Gal}(F_\infty/F_n)$ (avec $\Gamma_0 := \Gamma$)
$\mathcal{L}'_{F_\infty} = \mathcal{L}'_\infty$	la pro-p-extension non ramifiée, $p\infty$-décomposée maximale de F_∞
$\mathcal{G}'_{F_\infty} = \mathcal{G}'_\infty$	le pro-p-groupe $\mathrm{Gal}(\mathcal{L}'_{F_\infty}/F_\infty)$
$L'_{F_\infty} = L'_\infty$	la pro-p-extension non ramifiée, $p\infty$-décomposée, abélienne maximale de F_∞
$X'_{F_\infty} = X'_\infty$	le $\mathbb{Z}_p$-module $\mathrm{Gal}(L'_{F_\infty}/F_\infty)$
E	le corps $F(\mu_{2p})$
Δ	le groupe $\mathrm{Gal}(E/F)$
d	l'ordre de Δ.

Enfin, on dit que G est un p-groupe lorsque G est un groupe fini d'ordre une puissance de p. Une p-extension L/F est une extension galoisienne telle que $\mathrm{Gal}(L/F)$ est un p-groupe.

Chapitre 1

K-théorie des corps de nombres

On présente brièvement les groupes de K-théorie algébrique ainsi que leur version p-adique : les K-groupes étales.
On s'intéresse pour finir aux noyaux sauvages étales.

1.1 K-théorie algébrique

Nous nous intéressons dans ce qui suit aux foncteurs $(K_n)_{n\geq 0}$ de la K-théorie algébrique. Ces foncteurs sont définis de la catégorie des anneaux vers celle des groupes abéliens.

Etant donné un anneau unitaire A, le groupe de Grothendieck $K_0(A)$ est le quotient du groupe abélien libre formé sur les classes d'isomorphisme $[P]$ des A-modules à gauche P qui sont projectifs et de type fini, par le sous-groupe engendré par les éléments de la forme

$$[P] + [Q] - [P \oplus Q].$$

Pour un anneau unitaire A et un entier $n \geq 1$, D. Quillen a construit le groupe abélien $K_n(A)$ comme le n-ième groupe d'homotopie d'un espace topologique $BGL(A)^+$. L'espace $BGL(A)^+$ est obtenu en modifiant l'espace classifiant $BGL(A)$ du groupe linéaire infini $GL(A) = \bigcup_{n\geq 1} GL_n(A)$.

Soit F un corps de nombres, i.e. une extension finie du corps des rationnels $\mathbb{Q}$. Pour tout ensemble fini S de places de F, on désigne par $\mathcal{O}_F^S$ l'anneau des S-entiers du corps F. Notre objectif est l'étude de la K-théorie des anneaux $\mathcal{O}_F^S$. Nous rappelons brièvement le calcul des premiers groupes de K-théorie dans certains cas particuliers.
On utilise les notations suivantes :

- $\mu(F)$ est le groupe des racines de l'unité contenues dans F.
- r_1 (resp. r_2) désigne le nombre de places réelles (resp. de paires de places complexes conjuguées) de F.

Le groupe K_0.
Si A est un anneau de Dedekind (c'est le cas des anneaux $\mathcal{O}_F^S$), alors on a $K_0(A) \simeq \mathbb{Z} \oplus Pic(A)$, où $Pic(A)$ désigne le groupe de Picard de A.

Lorsque A est un corps ou un anneau local, on a simplement $K_0(A) \simeq \mathbb{Z}$.

Lorsque A est l'anneau des S-entiers d'un corps de nombres, le groupe $Pic(\mathcal{O}_F^S)$ est aussi appelé groupe des S-classes de F. C'est un groupe fini que nous notons $Cl^S(F)$. On a ainsi :

$$K_0(\mathcal{O}_F^S) = \mathbb{Z} \oplus Cl^S(F).$$

Le calcul des groupes de classes est accessible pour les "petits" corps de nombres, mais reste en général un problème difficile.

Le groupe K_1.
Pour un anneau unitaire A quelconque, le groupe $K_1(A)$ est égal à l'abélianisé du groupe linéaire $GL(A)$. Lorsque $A = \mathcal{O}_F^S$, il résulte de [BMS] l'isomorphisme

$$K_1(\mathcal{O}_F^S) \simeq (\mathcal{O}_F^S)^\times$$

Le groupe $(\mathcal{O}_F^S)^\times$ est aussi appelé groupe des S-unités de F. C'est un $\mathbb{Z}$-module de type fini. Le théorème de Dirichlet sur les unités nous donne

$$K_1(\mathcal{O}_F^S) \simeq \mu(F) \times \mathbb{Z}^{r_1+r_2+s_f-1},$$

où s_f désigne le nombre de places non-archimédiennes contenues dans S.

Le groupe K_2.
Le K_2 d'un corps admet une description simple qui fait intervenir la notion de *symbole*.

Définition 1.1.1. *Un symbole sur un corps commutatif k, à valeurs dans un groupe abélien G, est une application s de $k^\times \times k^\times$ dans G qui est $\mathbb{Z}$-bilinéaire et telle que pour tout $x \in k$*

$$s(x, 1-x) = 1_G.$$

Pour un corps commutatif k, Matsumoto a montré que le groupe $K_2(k)$ est le groupe universel qui factorise les symboles sur k. Plus précisément on a l'isomorphisme :

$$K_2(k) = k^\times \otimes k^\times / I,$$

où I est le groupe engendré par les éléments de la forme $x \otimes (1-x)$, avec $x \in k^\times - \{1\}$.

L'image de $x \otimes y$ dans $K_2(F)$ est notée $\{x, y\}$.

Exemple. Soit p un nombre premier, k un corps tel que $car(k) \neq p$ et r un entier positif. Si k contient une racine primitive p^r-ième de l'unité, notée ζ_{p^r} alors $\{\zeta_{p^r}, p\}$ est trivial dans $K_2(k)$.

En effet l'identité polynomiale $1 + X + \ldots + X^{p^r-1} = \prod_{i=1}^{p^r-1}(X - \zeta_{p^r}^i)$ nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \{\zeta_{p^r}, p^r\} &= \{\zeta_{p^r}, \prod_{i=1}^{p^r-1}(1-\zeta_{p^r}^i)\} \\ &= \prod_{i=1}^{p^r-1}\{\zeta_{p^r}, 1-\zeta_{p^r}^i\} \end{aligned}$$

Si i est premier avec p, alors il existe un entier j tel que $ij \equiv 1 \mod p^r$ et

$$\{\zeta_{p^r}, 1-\zeta_{p^r}^i\} = \{\zeta_{p^r}^i, 1-\zeta_{p^r}^i\}^j = 1$$

alors

$$\begin{aligned} \{\zeta_{p^r}, p^r\} &= \prod_{i=1}^{p^{r-1}-1}\{\zeta_{p^r}, (1-\zeta_{p^{r-1}}^i)\} \\ &= \{\zeta_{p^r}, p^{r-1}\} \end{aligned}$$

d'où l'égalité $\{\zeta_{p^r}, p\} = 1$.

Lorsque F est un corps de nombres, on définit une famille importante de symboles en lien avec l'arithmétique de F.
Pour chaque place non complexe $\mathfrak{p}$ de F, désignons par $F_\mathfrak{p}$ le complété de F en $\mathfrak{p}$; notons $k_\mathfrak{p}$ le corps résiduel en $\mathfrak{p}$ et $m_\mathfrak{p}$ l'ordre de $\mu_\mathfrak{p} := \mu(F_\mathfrak{p})$.

Définition 1.1.2. *Pour $x, y \in F_\mathfrak{p}^\times$, le symbole de Hilbert $h_\mathfrak{p}(x, y) \in \mu_\mathfrak{p}$ est donné par*

$$(x, F_\mathfrak{p}(\sqrt[m_\mathfrak{p}]{y})/F_\mathfrak{p})\sqrt[m_\mathfrak{p}]{y} = h_\mathfrak{p}(x, y)\sqrt[m_\mathfrak{p}]{y},$$

où $(., F_\mathfrak{p}(\sqrt[m_\mathfrak{p}]{y})/F_\mathfrak{p})$ est l'application d'Artin locale.

Remarque. La définition a toujours un sens lorsque $\mathfrak{p}$ est une place réelle de F.

On montre que $h_\mathfrak{p}$ est un symbole sur $F_\mathfrak{p}$. En particulier, toute puissance de $h_\mathfrak{p}$ est encore un symbole. Notons $\mu_\mathfrak{p}^0$ le sous-groupe de $\mu_\mathfrak{p}$ des racines d'ordre premier à p et notons $m_\mathfrak{p}^0$ son ordre. Le symbole

$$r_\mathfrak{p} := h_\mathfrak{p}^{(\frac{m_\mathfrak{p}}{m_\mathfrak{p}^0})} \in \mu_\mathfrak{p}^0,$$

est appelé *symbole modéré*. En identifiant $\mu_\mathfrak{p}^0$ et le groupe multiplicatif du corps résiduel $\mathbb{F}_\mathfrak{p} = \mathcal{O}_F/\mathfrak{p}$, on obtient l'identité :

$$r_\mathfrak{p}(x, y) = (-1)^{v_\mathfrak{p}(x)v_\mathfrak{p}(y)} \frac{x^{v_\mathfrak{p}(y)}}{y^{v_\mathfrak{p}(x)}} \bmod \mathfrak{p}.$$

On montre que le groupe $K_2(\mathcal{O}_F^S)$ s'identifie au noyau dans $K_2(F)$ des symboles modérés (restreints à S). Plus précisément, on a une suite exacte

$$0 \to K_2(\mathcal{O}_F^S) \to K_2(F) \overset{\oplus r_\mathfrak{p}}{\to} \bigoplus_{\mathfrak{p} \notin S} k_\mathfrak{p}^\times \to 0,$$

où $\mathfrak{p}$ parcourt les places finies de F qui ne sont pas dans S.

Garland a démontré la finitude de $K_2(\mathcal{O}_F^S)$ (cf [Ga]).

Les symboles de Hilbert induisent un morphisme $h := \oplus h_\mathfrak{p}$ du groupe $K_2(F)$ vers la somme directe des groupes $\mu_\mathfrak{p}$. Le noyau de ce morphisme est un sous-groupe de $K_2(\mathcal{O}_F)$, appelé *noyau sauvage de F* et noté $WK_2(F)$. Le conoyau de h est également connu ; il s'identifie par la formule du produit au groupe $\mu(F)$ (cf. [CW]). Pour résumer, on a la suite exacte (de Moore) :

$$0 \to WK_2(F) \to K_2(F) \xrightarrow{h} \bigoplus_{\mathfrak{p}} \mu(F_{\mathfrak{p}}) \to \mu(F) \to 0,$$

où $\mathfrak{p}$ parcourt les places non complexes de F.

Les résultats de Borel et Quillen en géométrie des nombres nous donnent des informations sur la structure des K-groupes supérieurs.

Les groupes K_n, $n \geq 2$ pair.
Pour tout $i \geq 1$ les groupes $K_{2i}(\mathcal{O}_F^S)$ sont finis.

Les groupes K_n, $n \geq 3$ impair.
Pour tout $i \geq 1$, les groupes $K_{2i+1}(\mathcal{O}_F^S)$ sont de type fini. Leur $\mathbb{Z}$-rang est connu et ne dépend pas de S :

$$rg_{\mathbb{Z}} K_{2i+1}(\mathcal{O}_F^S) = \begin{cases} r_1 + r_2 & \text{si } i \text{ est pair,} \\ r_2 & \text{si } i \text{ est impair} \end{cases}$$

La $\mathbb{Z}$-torsion de $K_{2i+1}(\mathcal{O}_F^S)$ est en partie connue (cf. par exemple [We]).

En outre, C. Soulé a montré que pour tout $i \geq 1$:

$$K_{2i+1}(\mathcal{O}_F^S) \simeq K_{2i+1}(F).$$

Il en résulte une suite exacte courte de localisation pour tout $i \geq 1$:

$$0 \to K_{2i}(\mathcal{O}_F^S) \to K_{2i}(F) \to \oplus_{\mathfrak{p} \notin S} K_1(k_{\mathfrak{p}}) \to 0.$$

Cette suite s'identifie, pour $i = 1$, à la suite exacte induite par les symboles modérés sur $K_2(F)$.

Nous voyons ici apparaître l'idée suivante :
- Les K-groupes pairs d'un anneau d'entiers ont un comportement analogue au groupe des classes de cet anneau.
- Les K-groupes impairs d'un anneau d'entiers ont un comportement analogue au groupe des unités de cet anneau.

Nous retrouverons ces analogies dans la suite.

1.2 K-groupes étales

Dans cette section, nous introduisons les K-groupes *étales* des anneaux $\mathcal{O}_F^S$ ainsi que certaines propriétés dont nous aurons besoin dans la suite. On fixe un nombre premier p.

1.2.1 Cohomologie étale

Soient F un corps de nombres et S un ensemble de places de F contenant l'ensemble S_p des places au-dessus de p et l'ensemble S_∞ des places à l'infini. Nous commençons par quelques rappels sur la cohomologie étale du schéma $\mathrm{spec}(\mathcal{O}_F^S)$ et la cohomologie galoisienne.

On note :

- μ_{p^n} le groupe des racines p^n-ièmes de l'unité et pour tout entier $i \geq 0$ son i-ième tensorisé :
$$\mu_{p^n}^{\otimes i} := \underbrace{\mu_{p^n} \otimes \cdots \otimes \mu_{p^n}}_{i \text{ fois}}.$$
- $\mu_{p^\infty} := \bigcup_{n\geq 1} \mu_{p^n}$.
- $\mathbb{Z}_p(1) := \varprojlim \mu_{p^n}$ et pour tout $i \geq 0$,
$$\mathbb{Z}_p(i) := \varprojlim \mu_{p^n}^{\otimes i} \simeq \underbrace{\mathbb{Z}_p(1) \otimes \cdots \otimes \mathbb{Z}_p(1),}_{i \text{ fois}}$$
où la limite projective est prise sur les projections $\mu_{p^{n+1}}^{\otimes i} \to \mu_{p^n}^{\otimes i}$.
- F^S l'extension S-ramifiée (i.e. non ramifiée hors de S) maximale de F et son groupe de Galois $G_F^S := \mathrm{Gal}(F^S/F)$.

Enfin, étant donné un $\mathbb{Z}_p[G_F^S]$-module A, on définit pour tout $i \geq 0$ le $\mathbb{Z}_p[G_F^S]$-module
$$A(i) := A \otimes \mathbb{Z}_p(i),$$
où G_F^S opère diagonalement sur $\mu_{p^n}^{\otimes i}$. On appelle $A(i)$ le i-ième tordu à la Tate de A.
La définition s'étend à tout entier négatif $i < 0$, en posant
$$A(i) := \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_p(-i), A).$$

Groupes de cohomologie étale et groupes de cohomologie galoisienne coïncident :

$$H^*_{\acute{e}t}(\mathrm{spec}(\mathcal{O}_F^S), \mu_{p^n}^{\otimes i}) = H^*(G_F^S, \mu_{p^n}^{\otimes i}).$$

Pour simplifier, nous adoptons la notation suivante :

$$H^*_{\acute{e}t}(\mathcal{O}_F^S, \mathbb{Z}/p^n(i)) := H^*(G_F^S, \mathbb{Z}/p^n(i)).$$

En outre, on pose

$$H^*_{\acute{e}t}(\mathcal{O}_F^S, \mathbb{Z}_p(i)) := \varprojlim H^*_{\acute{e}t}(\mathcal{O}_F^S, \mathbb{Z}/p^n(i)),$$

la limite étant prise pour les morphismes induits par les projections $\mathbb{Z}/p^{n+1}(i) \to \mathbb{Z}/p^n(i)$.

Notons que ce dernier groupe s'identifie également au groupe de cohomologie galoisienne *continue* (cf. [Ta]) :

$$H^*_{cont}(G_F^S, \mathbb{Z}_p(i)).$$

Dans la suite, nous ne ferons plus référence à l'indice *cont*.

Enfin, en degré 1, pour $i \neq 1$ et p impair (si $p = 2$ on suppose que $\sqrt{-1} \in F$), les groupes de cohomologie galoisienne ne dépendent pas du choix de l'ensemble S contenant S_p :

$$H^1_{\acute{e}t}(\mathcal{O}_F^S, \mathbb{Z}_p(i)) \simeq H^1(F, \mathbb{Z}_p(i)),$$

où $H^*(F, .)$ désigne les groupes de cohomologie *absolue* de F, i.e. les groupes $H^*(\mathrm{Gal}(\bar{F}/F), .)$ où $\bar{F}$ est une clôture algébrique de F.

La cohomologie de G_F^S est fortement reliée à l'arithmétique du corps F comme le montre ce qui suit :

1. Pour $i \neq 0$: $H^0_{\acute{e}t}(\mathcal{O}_F^S, \mathbb{Z}_p(i)) = 0$.
2. Pour $i = 1$:
$$H^1_{\acute{e}t}(\mathcal{O}_F^S, \mathbb{Z}_p(1)) \simeq \mathbb{Z}_p \otimes (\mathcal{O}_F^S)^\times$$
et
$$H^2_{\acute{e}t}(\mathcal{O}_F^S, \mathbb{Z}_p(1)) \simeq Cl_F^S\{p\} \oplus \mathbb{Z}_p^{s_f - 1}$$
3. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et tout $k \geq 3$:
$$H^k_{\acute{e}t}(\mathcal{O}_F^S, \mathbb{Z}_p(i)) \simeq \begin{cases} (\mathbb{Z}/2)^{r_1} & \text{si } p = 2 \text{ et } k + n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En degré 1 et 2, pour $i \geq 2$ et p impair, C. Soulé ([Sou]) a défini des caractères de Chern :

$$ch_{k,i} : K_{2i-k}(\mathcal{O}_F^S) \otimes \mathbb{Z}_p \to H^k_{ét}(\mathcal{O}_F^S, \mathbb{Z}_p(i))$$

qui mettent en relation la K-théorie algébrique de l'anneau des S-entiers de F et la cohomologie étale de spec$(\mathcal{O}_F^S)$. C. Soulé a également montré la surjectivité de ces morphismes.

Pour $i \geq 1$ et $k = 1, 2$ les groupes $H^k_{ét}(\mathcal{O}_F^S, \mathbb{Z}_p(i+1))$ sont, par ailleurs, isomorphes aux groupes de K-théorie étale introduits par W.-G. Dwyer et E.M. Friedlander (cf. [DF]). Ces derniers ont également obtenu la surjectivité des caractères de Chern lorsque $p = 2$ et $\sqrt{-1} \in F$.

Nous adoptons la "notation" $K^{ét}$ pour désigner les groupes de cohomologie. Plus précisement, on pose :

pour $i \geq 1$ et S contenant S_p, $K^{ét}_{2i}(\mathcal{O}_F^S) = H^k_{ét}(\mathcal{O}_F^S, \mathbb{Z}_p(i+1))$,

et pour $i \geq 1$, $K^{ét}_{2i}(F) = H^k_{ét}(F, \mathbb{Z}_p(i+1))$.

Revenons sur la relation entre K-groupes algébriques et K-groupes étales. La conjecture de Quillen-Lichtenbaum prédit :

Conjecture 1.2.1. *Pour tout corps de nombres F et tout ensemble de places S contenant $S_p \cup S_\infty$ les caractères de Chern induisent des isomorphismes*

$$K_{2i-k}(\mathcal{O}_F^S) \otimes \mathbb{Z}_p \xrightarrow{\simeq} K^{ét}_{2i-k}(\mathcal{O}_F^S)$$

pour $i \geq 2$, $k = 1, 2$, sauf si $p = 2$ et $r_1(F) \geq 1$.

Remarques.
Si T désigne un ensemble fini de places de F alors pour tout $n \geq 2$ et dans les conditions de la conjecture précédente (cf. [We, theorem 70]) :

$$K_n(\mathcal{O}_F^T) \otimes \mathbb{Z}_p \simeq K_n(\mathcal{O}_F^T[1/p]) \otimes \mathbb{Z}_p.$$

Des résultats récents de Voevodsky et Rost sur la conjecture de Bloch-Kato pour les corps de nombres semblent confirmer la conjecture de Quillen-Lichtenbaum.

Les résultats de Borel et Quillen sur la K-théorie algébrique ainsi que la surjectivité des caractères de Chern nous donnent des informations sur la structure de $\mathbb{Z}_p$-module des K-groupes étales.

1. Pour tout $i \geq 1$, les groupes $K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_F^S)$ sont *finis*.
2. Pour tout $i \geq 1$, les groupes $K_{2i+1}^{ét}(\mathcal{O}_F^S) \simeq K_{2i+1}^{ét}(F)$ sont de *type fini* sur $\mathbb{Z}_p$. Précisément, on a :

$$K_{2i+1}^{ét}(F) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}_p^{r_1+r_2} \oplus \mathbb{Z}/\omega_{i+1}(F) & \text{si } i \text{ est pair,} \\ \mathbb{Z}_p^{r_2} \oplus \mathbb{Z}/\omega_{i+1}(F) & \text{si } i \text{ est impair} \end{cases}$$

avec :

$$\begin{aligned} \omega_k(F) &:= |H^0(F, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(k))| \\ &= \max\{p^m, \mathrm{Gal}(F(\mu_{p^m})/F) \text{ est d'exposant } k\}. \end{aligned}$$

1.2.2 Descente et codescente

On dit qu'une extension de corps de nombres L/F est une p-extension lorsque L/F est une extension galoisienne finie et $\mathrm{Gal}(L/F)$ est un p-groupe.

Dans toute cette partie, on fixe un ensemble fini S de places de F contenant les places p-adiques et les places à l'infini. Par abus, on note toujours $S := S_L$ l'ensemble des places de L au-dessus des places contenues dans S. On s'intéresse maintenant au comportement galoisien des K-groupes dans les p-extensions S-ramifiées.

Soit M un groupe abélien et G un groupe fini opérant sur M. On note
- M^G le sous-groupe de M des éléments invariants par G.
- M_G le quotient M/I_GM, où I_G est le sous-groupe de $\mathbb{Z}[G]$ engendré par les $g-1$, $g \in G$.

Dans un premier temps, on met en relation les morphismes d'extension et de norme en K-théorie avec les flèches naturelles de restriction et corestriction en cohomologie *galoisienne* (ces flèches s'expriment aussi naturellement en cohomologie étale). Soit L/F une p-extension de groupe de Galois G, non ramifiée hors de S. Pour $i \geq 1$ et $k \in \{1, 2\}$ on a
- un morphisme d'extension $e_{k,i}$ et un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} K_{2i+2-k}^{ét}(\mathcal{O}_F^S) & \xrightarrow{e_{k,i}} & K_{2i+2-k}^{ét}(\mathcal{O}_L^S)^G \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ H^k(G_F^S, \mathbb{Z}_p(i+1)) & \xrightarrow{\mathrm{res}} & H^k(G_L^S, \mathbb{Z}_p(i+1))^G. \end{array}$$

– un morphisme de norme $N_{k,i}$ et un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} K^{ét}_{2i+2-k}(\mathcal{O}^S_L)_G \arrow[r, "N_{k,i}"] \arrow[d, "\simeq"] & K^{ét}_{2i+2-k}(\mathcal{O}^S_F) \arrow[d, "\simeq"] \\ H^k(G^S_L, \mathbb{Z}_p(i+1))_G \arrow[r, "\mathrm{cor}"] & H^k(G^S_F, \mathbb{Z}_p(i+1)). \end{tikzcd}$$

Le résultat suivant met en relation les noyaux et conoyaux du morphisme d'extension pour les K-groupes pairs avec la cohomologie des K-groupes impairs. Pour $i = 1$ ce résultat est à rapprocher d'un résultat de B. Kahn (cf [Ka]). Pour tout $i \geq 1$ on renvoie à [KM, Theorem 1.2].

Théorème 1.2.2. *Soit p un nombre premier impair et L/F une p-extension de groupe de Galois G. Soit S un ensemble de places de F contenant les places p-adiques, les places à l'infini et les places ramifiées dans L/F. Alors pour tout $i \geq 1$ on a une suite exacte :*

$$\begin{aligned} 0 \to H^1(G, K^{ét}_{2i+1}(L)) \to \quad & K^{ét}_{2i}(\mathcal{O}^S_F) \\ & \xrightarrow{e_{2,i}} \quad K^{ét}_{2i}(\mathcal{O}^S_L)^G \to H^2(G, K^{ét}_{2i+1}(L)) \to 0, \end{aligned}$$

et un isomorphisme :

$$K^{ét}_{2i+1}(F) \overset{e_{1,i}}{\simeq} K^{ét}_{2i+1}(L)^G.$$

Démonstration. Pour tout $i \geq 1$, la suite exacte du théorème résulte de la suite spectrale d'Hochschild-Serre :

$$E_2^{pq} = H^p(G, H^q(G^S_L, \mathbb{Z}_p(i+1))) \Rightarrow H^{p+q}(G^S_F, \mathbb{Z}_p(i+1)),$$

et de l'inégalité (en effet $p > 2$) :

$$\mathrm{cd}_p(G^S_F) \leq 2.$$

□

Remarque. La suite exacte du théorème précédent est à rapprocher de la suite exacte pour les groupes de classes :

$$0 \to H^1(G, (\mathcal{O}^S_L)^\times) \to Cl^S(F) \to Cl^S(L)^G.$$

Ceci confirme l'analogie déjà évoquée entre K-groupes pairs (resp. impair) et groupes de classes (resp. groupes d'unités).

Toutefois, comme le montre la proposition suivante, le comportement galoisien des K-groupes pairs est en général plus simple que celui des groupes de classes (cf. [N1, Proposition 1.4.] et [KM, Proposition 1.3.]).

Proposition 1.2.3. *Soient p un nombre premier impair et L/F une p-extension. Soit S un ensemble de places de F contenant $S_p \cup S_\infty$ et les places ramifiées dans L/F. On a l'isomorphisme :*

$$K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_L^S)_G \overset{N_{2,i}}{\simeq} K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_F^S).$$

Nous nous intérressons dans ce qui suit aux noyaux de capitulation des K-groupes pairs (i.e. les noyaux des morphismes d'extension).

Définition 1.2.4. *Pour toute p-extension S-ramifiée L/F et tout entier $i \geq 1$, on note :*

$$\mathrm{Cap}_i^S(L/F) := \ker(K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_F^S) \to K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_L^S)),$$

Le résultat suivant est un corollaire du théorème 1.2.2 et de la proposition 1.2.3.
Les groupes $\hat{H}^*(G,.)$ désignent les groupes de cohomologie modifiés (cf. par exemple [Se1, Chapitre VIII])

Corollaire 1.2.5. *Soit L/F une p-extension finie, non ramifiée en dehors de S et $G := \mathrm{Gal}(L/F)$. Alors*

$$\mathrm{Cap}_i^S(L/F) \simeq \hat{H}^{-1}(G, K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_L^S)) \simeq H^1(G, K_{2i+1}^{ét}(L)), \textit{et}$$

$$\mathrm{coker}(e_{2,i}) \simeq \hat{H}^0(G, K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_L^S)) \simeq H^2(G, K_{2i+1}^{ét}(L)).$$

De plus, lorsque L/F est cyclique, le quotient de Herbrand

$$h(G, K_{2i+1}^{ét}(L)) = \frac{|H^2(G, K_{2i+1}^{ét}(L))|}{|H^1(G, K_{2i+1}^{ét}(L))|}$$

est trivial.

Remarques.

- Les noyaux $\mathrm{Cap}_i^S(L/F)$ ne dépendent pas de l'ensemble S contenant $S_p \cup S_\infty$ et les premiers ramifiés dans L/F. On note désormais

$$\mathrm{Cap}_i(L/F) := \mathrm{Cap}_i^S(L/F).$$

- L'extension L/F étant fixée il est possible de borner l'ordre de ces noyaux. Si L/F est cyclique de degré p on a :

$$|\,\mathrm{Cap}_i(L/F)| \leq p^{1+r_2}.$$

Trouver une minoration intéressante de $|\operatorname{Cap}_i(L/F)|$ est en général plus difficile (le problème est soulevé par B. Kahn dans l'introduction de [Ka]). Dans [AM], les auteurs donnent une minoration de cet ordre sous certaines hypothèses de ramification pour L/F.

La proposition suivante est classique et porte sur la trivialité des noyaux de capitulation dans une p-extension :

Proposition 1.2.6. *Soient L/F et L'/F des p-extensions finies, S-ramifiées avec $L \subset L'$. Alors*

$$\operatorname{Cap}_i(L'/F) = 0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{Cap}_i(L'/L) = 0 \text{ et } \operatorname{Cap}_i(L/F) = 0$$

Démonstration. Plaçons nous dans le cas où L/F est de degré p et posons $G = \operatorname{Gal}(L'/F)$ et $H = \operatorname{Gal}(L'/L)$.
Comme L/F est cyclique, on a l'égalité $|H^1(G/H, K_{2i+1}^{ét}(L))| = |H^2(G/H, K_{2i+1}^{ét}(L))|$ comme conséquence du théorème 1.2.2 et de la proposition 1.2.3.
La suite spectrale suivante nous donne immédiatement la proposition :

$$0 \longrightarrow H^1(G/H, K_{2i+1}^{ét}(L)) \longrightarrow H^1(G, K_{2i+1}^{ét}(L'))$$

$$\longrightarrow H^1(H, K_{2i+1}^{ét}(L'))^{G/H} \longrightarrow H^2(G/H, K_{2i+1}^{ét}(L)).$$

Par dévissage, on étend le résultat au cas où L est une p-extension. □

On termine cette section par quelques résultats de nullité pour les noyaux de capitulation. Ceux-ci sont produits au moyen de la suite exacte :

$$0 \to K_{2i+1}^{ét}(F)/p^n \to H^1(G_F^S, \mathbb{Z}/p^n(i+1)) \to {}_{p^n}K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_F^S) \to 0 \qquad (1.2.1)$$

qui provient de la suite exacte courte de G_F^S-modules

$$0 \to \mathbb{Z}_p(i+1) \xrightarrow{p^n} \mathbb{Z}_p(i+1) \to \mathbb{Z}/p^n(i+1) \to 0.$$

Proposition 1.2.7. *(cf. [AM, Proposition 3.2])*
Soient F un corps de nombres contenant μ_p et L/F une p-extension admettant de la ramification modérée (i.e. une place non p-adique se ramifie). Alors $\operatorname{Cap}_i(L/F)$ n'est pas trivial.

La propostion suivante montre que $K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_F^S)$ *capitule* dans une certaine p-extension p-ramifiée. La preuve de cette proposition fait encore appel à 1.2.1 ; l'idée est d'ajouter suffisamment de racines de l'unité pour faire "sortir" les twists.

Proposition 1.2.8. *Soit F un corps de nombres contenant μ_p et S un ensemble de places contenant S_p. Il existe une p-extension p-ramifiée L/F telle que*

$$\mathrm{Cap}_i(L/F) = K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_F^S).$$

Démonstration. Soit p^r l'exposant de $K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_F^S)$. On a une surjection :

$$H^1(G_F^S, \mathbb{Z}/p^r(i+1)) \to K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_F^S).$$

Pour conclure, il suffit d'exhiber une p-extension finie L/F telle que le morphisme de restriction

$$H^1(G_F^S, \mathbb{Z}/p^r(i+1)) \overset{\mathrm{res}}{\to} H^1(G_L^S, \mathbb{Z}/p^r(i+1))$$

soit nul.
Posons $F_r = F(\mu_{p^r})$. Alors $H^1(G_{F_r}^S, \mathbb{Z}/p^r(i+1)) = H^1(G_{F_r}^S, \mathbb{Z}/p^r)(i+1)$. Notons M_r l'extension p-ramifiée abélienne d'exposant p^r maximale de F_r. L'extension M_r/F_r est finie et le morphisme de restriction

$$H^1(G_{F_r}^S, \mathbb{Z}/p^r) \overset{\mathrm{res}}{\to} H^1(G_{M_r}^S, \mathbb{Z}/p^r)$$

est trivial.
L'extension M_r/F est galoisienne, p-ramifiée et on a $\mathrm{Cap}_i(M_r/F) = K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_F^S)$ □

Pour finir, nous donnons une proposition à laquelle nous ferons appel dans le dernier chapitre. Celle-ci se base encore une fois sur 1.2.1.

Proposition 1.2.9. *Soit L une p-extension S-ramifiée de F. Posons $G =$* $\mathrm{Gal}(L/F)$ *et*

$$d(G) := \dim_{\mathbb{F}_p}(H^1(G, \mathbb{Z}/p)),$$

le p-rang de G.
Supposons que $i \equiv -1 \bmod [F(\mu_p) : F]$ et que $d(G)$ est supérieur ou égal à $1 + r_2(F)$ (resp. $1 + r_2(F) + r_1(F)$) lorsque i est impair (resp. pair).
Sous ces hypothèses $\mathrm{Cap}_i(L/F)$ *n'est pas trivial.*

Démonstration. Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_{2i+1}^{ét}(L)/p \arrow[r] & H^1(G_L^S, \mathbb{Z}/p^n(i+1)) \arrow[r] & K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_L^S) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_{2i+1}^{ét}(F)/p \arrow[r] \arrow[u] & H^1(G_F^S, \mathbb{Z}/p^n(i+1)) \arrow[r] \arrow[u, "\text{res}"] & K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_F^S) \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

Comme $i \equiv -1 \mod[F(\mu_p) : F]$, le groupe G_F^S opère trivialement sur $\mathbb{Z}/p(i+1)$ et le noyau de la restriction est :

$$\ker\Big(H^1(G_F^S, \mathbb{Z}/p(i+1)) \overset{res}{\to} H^1(G_L^S, \mathbb{Z}/p(i+1))\Big) = H^1(G, \mathbb{Z}/p)(i+1).$$

Par hypothèse

$$d(G) = \dim_{\mathbb{F}_p}(H^1(G, \mathbb{Z}/p)(i+1)) > \dim_{\mathbb{F}_p}(K_{2i+1}^{ét}(F)/p).$$

Ainsi, il existe un élément non nul, $x \in H^1(G, \mathbb{Z}/p)(i+1)$ tel que $\delta(x) \in {}_pK_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_F^S)$ est également non nul et qui capitule dans $K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_L^S)$. □

Corollaire 1.2.10. *Soit F un corps contenant μ_p et soit M/F l'extension d'exposant p abélienne, p-ramifiée maximale. Alors*

$$\mathrm{Cap}_i(M/F) = 0 \;\Leftrightarrow\; K_{2i}^{ét}(O_F^S) = 0.$$

Démonstration. Soit d le p-rang de $\mathrm{Gal}(M/F)$. Il est connu que $d \geq 1 + r_2$. Si $d > 1 + r_2$ alors la proposition 1.2.9 permet de conclure.

Si $d = 1 + r_2$ alors un calcul des p-rangs dans la suite exacte 1.2.1 permet de conclure. On peut aussi remarquer que dans ce cas la $\mathbb{Z}_p$-torsion de $(G_F^{S_p})^{ab}$ est triviale (cf. par exemple [N1]). □

Remarque. Le corollaire peut aussi s'obtenir en considérant la surjection :

$$H^1(G_F^S, \mathbb{Z}/p(i+1)) \to {}_pK_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_F^S).$$

1.3 Noyaux de localisation

1.3.1 La dualité de Poitou-Tate

Pour commencer nous rappelons le principe de *dualité locale*. Soient p un nombre premier et $F/\mathbb{Q}_p$ une extension finie. Soient $\bar{F}$ une clôture algébrique de F et $G_F := \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$. Pour tout $\mathbb{Z}_p[G_F]$-module fini A, on définit le dual de Kummer :

$$A' := \mathrm{Hom}(A, \mu_{p^\infty}),$$

et le dual de Pontryagin :

$$A^* := \mathrm{Hom}(A, \mathbb{R}/\mathbb{Z}).$$

La dualité de Pontryagin échange les groupes discrets et les groupes compacts.
Lorsque A est un pro-p-groupe on a :

$$A^* := \mathrm{Hom}(A, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p).$$

Dans ce cas A^* est un groupe abélien discret de p-torsion.

Théorème 1.3.1. ***(Dualité locale de Tate.)***
Pour tout $k \in \{0, 1, 2\}$ le cup-produit induit une dualité parfaite :

$$H^k(F, A) \times H^{2-k}(F, A') \to H^2(F, \mu_{p^\infty}) \simeq \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p.$$

Une conséquence de ce théorème est l'isomorphisme *canonique* :

$$H^k(L, A) \simeq H^{2-k}(L, A')^*.$$

Cette dualité "commute" avec les flèches naturelles en cohomologie galoisienne. En particulier, si L/F est une p-extension on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} H^k(L, A) & \times & H^{2-k}(L, A') & \to & \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \\ {\scriptstyle \mathrm{cor}}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{res}} & & \downarrow{\scriptstyle =} \\ H^k(F, A) & \times & H^{2-k}(F, A') & \to & \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, \end{array}$$

On a évidemment un diagramme commutatif en échangeant cor et res dans le diagramme précédent.

Soit F un corps de nombres et S un ensemble fini de places de F contenant $S_p \cup S_\infty$. Intéressons nous au principe de dualité globale ; on introduit les noyaux de localisation :

$$Ш^k_S(F, M) := \ker(H^k(G^S_F, M) \to \oplus_{v\in S} H^k(F_v, M)),$$

où M est un $\mathbb{Z}_p[G^S_F]$-module fini.

Théorème 1.3.2. ***(Dualité globale de Poitou-Tate.)***
Soit S un ensemble fini de places de F, contenant $S_p \cup S_\infty$ et M un G^S_F-module fini dont l'ordre est une S-unité de F. Pour tout $k \in \{1, 2\}$ on a une dualité parfaite entre groupes finis :

$$Ш^k_S(F, M) \times Ш^{3-k}_S(F, M') \to \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p.$$

De même les morphismes de restriction et corestiction induits sur les noyaux de localisation sont duaux l'un de l'autre par la dualité précédente.

1.3.2 Les noyaux sauvages supérieurs

Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, dans [S] P. Schneider a introduit les noyaux de localisation (cf aussi [Ba] et [N2]) :

$$\begin{array}{rcl} Ш^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i+1)) & := & \ker(H^2(G^S_F, \mathbb{Z}_p(i+1)) \to \oplus_{v\in S} H^2(F_v, \mathbb{Z}_p(i+1))) \\ & = & \varprojlim Ш^2_S(F, \mathbb{Z}/p^n(i+1)). \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} Ш^1_S(F, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(-i)) & := & \ker(H^1(G^S_F, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(-i)) \to \oplus_{v\in S} H^1(F_v, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(-i))) \\ & = & \varinjlim Ш^1_S(F, \mathbb{Z}/p^n(-i)). \end{array}$$

Par passage à la limite dans les théorèmes de dualité locale et globale on montre les isomorphismes canoniques :

$$H^2(F_v, \mathbb{Z}_p(i+1)) \simeq H^0(F_v, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(-i))^*,$$

et
$$Ш^2_S(F,\mathbb{Z}_p(i+1)) \simeq Ш^1_S(F,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(-i))^*.$$

En particulier, nous utiliserons dans le quatrième chapitre la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
Ш^1_S(L,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(-i)) & \times & Ш^2_S(L,\mathbb{Z}_p(i+1)) & \to & \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \\
{\scriptstyle\mathrm{cor}}\downarrow & & {\scriptstyle\mathrm{res}}\uparrow & & \downarrow\simeq \\
Ш^1_S(F,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(-i)) & \times & Ш^2_S(F,\mathbb{Z}_p(i+1)) & \to & \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p,
\end{array}$$

où L/F est une p-extension S-ramifiée.

Dans ce qui suit on donne quelques interprétations de ces noyaux.

Proposition 1.3.3. *(cf. [NSW], Lemma(8.6.3))*
- *Les groupes $Ш^2_S(F,\mathbb{Z}/p^n(i+1))$ sont finis.*
- *Pour $i=0$ et $n\geq 1$, on a un isomorphisme (si $p=2$ on suppose que $\sqrt{-1}\in F$) :*
$$Cl^S(F)/p^n \simeq Ш^2_S(F,\mu_{p^n}).$$

Remarque. La finitude du groupe des classes nous donne l'isomorphisme

$$Ш^2_S(F,\mathbb{Z}_p(1)) \simeq Cl^S(F)\{p\}.$$

Conjecture 1.3.4. *Etant donné un entier $i\in\mathbb{Z}$, le groupe $Ш^2_S(F,\mathbb{Z}_p(i+1))$ est fini.*

Remarque. Pour $i\neq 0$ la finitude de $Ш^2_S(F,\mathbb{Z}_p(i+1))$ est équivalente à la trivialité de $H^2(G^S_F,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i+1))$.
Pour tout $i\geq 1$, le groupe $Ш^2_S(F,\mathbb{Z}_p(i+1))$ s'identifie canoniquement à un sous-groupe de $K^{ét}_{2i}(\mathcal{O}^S_F)$; ainsi $Ш^2_S(F,\mathbb{Z}_p(i+1))$ est fini.
Nous reviendrons sur ces conjectures dans le second chapitre.

Pour $i=1$, les résultats de Tate (cf. [Ta]) sur la cohomologie galoisienne et le K_2 des corps de nombres nous donnent la proposition suivante :

Proposition 1.3.5. *On a un isomorphisme canonique :*

$$WK_2(F)\{p\} \simeq Ш^2_S(F,\mathbb{Z}_p(2)).$$

On adopte alors la notation :

Définition 1.3.6. *Pour tout corps de nombres F, tout nombre premier p et tout $i \geq 1$ on pose*

$$WK_{2i}^{\acute{e}t}(F) := Ш_S^2(F, \mathbb{Z}_p(i+1)).$$

Le groupe $WK_{2i}^{\acute{e}t}(F)$ est appelé $2i$-*ième noyau sauvage étale* et ne dépend pas de l'ensemble S contenant $S_p \cup S_\infty$. Cette appelation est due à T. Nguyen Quang Do (cf. [N2]). Rappelons que le noyau sauvage classique est défini par la suite exacte de Moore :

$$0 \to WK_2(F) \to K_2(F) \overset{\oplus h_v}{\to} \oplus_v \mu(F_v) \to \mu(F) \to 0,$$

où v parcourt les places non complexes de F et h_v désigne le symbole de Hilbert en v.

Nous supposons désormais que lorsque $p = 2$, le corps F contient $\sqrt{-1}$.

Pour tout $i \geq 1$, on généralise cette suite exacte par la suite de localisation :

$$0 \to WK_{2i}^{\acute{e}t}(F) \to K_{2i}^{\acute{e}t}(\mathcal{O}_F^S) \to \widetilde{\oplus}_{v \in S} H^2(F_v, \mathbb{Z}_p(i+1)) \to 0,$$

où $\widetilde{\oplus}_{v \in S} H^2(F_v, \mathbb{Z}_p(i+1))$ désigne le noyau de la surjection

$$\oplus_{v \in S} H^2(F_v, \mathbb{Z}_p(i+1)) \to H^0(F, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(-i))^*.$$

Plus généralement, on a une suite exacte :

$$0 \to Ш_S^2(F, \mathbb{Z}_p(i+1)) \to H^2(G_F^S, \mathbb{Z}_p(i+1)) \to \widetilde{\oplus}_{v \in S} H^2(F_v, \mathbb{Z}_p(i+1)) \to 0.$$

Pour finir nous étudions certaines relations entre groupes des classes et noyaux de localisation. On désigne par A_F^S (resp. A'_F) le p-groupe $Cl_F^S\{p\}$ (resp. $Cl_F^{S_p}\{p\}$).

Soit un entier $n \geq 1$. Comme p est impair on a $cd_p(G_F^S) \leq 2$; la suite exacte de cohomologie de la suite exacte courte

$$0 \to \mathbb{Z}_p(i+1) \to \mathbb{Z}_p(i+1) \to \mathbb{Z}/p^n(i+1) \to 0$$

donne l'isomorphisme

$$H^2(G_F^S, \mathbb{Z}_p(i+1))/p^n \simeq H^2(G_F^S, \mathbb{Z}/p^n(i+1)).$$

Il en résulte immédiatement la proposition suivante (cf. [Ta, Theorem 6.2]) :

Proposition 1.3.7. *Supposons que F contient μ_{p^n}. Alors pour tout $i \geq 1$, on a un isomorphisme canonique :*

$$K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_F^S)/p^n \simeq H^2(G_F^S, \mu_{p^n})(i), \tag{1.3.1}$$

ainsi qu'une suite exacte :

$$0 \to A_F^S/p^n(i) \to K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_F^S)/p^n \overset{(\oplus l_v)}{\to} \bigoplus_{v\in S} \mu_{p^n}(i-1) \overset{\Sigma}{\to} \mu_{p^n}(i-1) \to 0,$$

où l_v provient de la localisation en $v \in S$ et Σ est l'application produit.

Pour un corps de nombres F contenant μ_{p^n} et tout $i \geq 1$, on définit un morphisme

$$WK_{2i}^{ét}(F)/p^n \to A_F^S/p^n(i)$$

qui rend le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} WK_{2i}^{ét}(F)/p^n & \simeq & Ш_S^2(F, \mathbb{Z}_p(i+1))/p^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_F^S/p^n(i) & \simeq & Ш_S^2(F, \mu_{p^n})(i) \end{array}$$

En général, les applications verticales du précédent diagramme ne sont pas bijectives. Nous montrerons à la fin du second chapitre qu'elles deviennent bijectives *asymptotiquement* (cf. Proposition 3.3.6). Pour le moment nous avons la condition de surjectivité :

Proposition 1.3.8. *Posons $\mu_{p^n} := \mu(F)$ et fixons un entier $i \geq 1$. On suppose que $n \geq 1$. Au moins un premier p-adique de F est totalement ramifiée dans $F(\mu_{p^{n+1}})/F$ si et seulement si l'application*

$$WK_{2i}^{ét}(F)/p^n \to A'_F/p^n(i)$$

est surjective.

Démonstration. Dans ce qui suit $S = S_p$. Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & WK_{2i}^{ét}(F)/p^n & \longrightarrow & K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_F^S)/p^n & \longrightarrow & (\widetilde{\oplus}_{v\in S} H^2(F_v, \mathbb{Z}_p(i+1)))/p^n & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \simeq & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A_F^S/p^n(i) & \longrightarrow & K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_F^S)/p^n & \longrightarrow & \widetilde{\oplus}_{v\in S} H^2(F_v, \mathbb{Z}/p^n(i+1)) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

La flèche de gauche est surjective si et seulement si la flèche de droite est injective. Considérons la suite exacte :

$$0 \to \widetilde{\oplus}_{v\in S} H^2(F_v, \mathbb{Z}_p(i+1))) \to \oplus_{v\in S} H^2(F_v, \mathbb{Z}_p(i+1)) \to (H^0(F, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(-i)))^* \to 0.$$

La suite exacte longue du serpent de la multiplication par p^n appliquée à la suite précédente nous dit que

$$C := \operatorname{coker}\left(\oplus_{v\in S} H^2(F_v, \mathbb{Z}_p(i+1)) \to (H^0(F, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(-i)))^*\right)$$

et

$$N := \ker\left(((\widetilde{\oplus}_{v\in S} H^2(F_v, \mathbb{Z}_p(i+1)))/p^n \to (\oplus_{v\in S} H^2(F_v, \mathbb{Z}_p(i+1)))/p^n\right)$$

sont isomorphes.
Or

$$H^2(F_v, \mathbb{Z}_p(i+1))/p^n \simeq H^2(F_v, Z/p^n(i+1)),$$

donc N est isomorphe à

$$\ker(((\widetilde{\oplus}_{v\in S} H^2(F_v, \mathbb{Z}_p(i+1)))/p^n \to \oplus_{v\in S} H^2(F_v, \mathbb{Z}/p^n(i+1))\right).$$

Ce dernier est nul si et seulement si C est nul. Enfin d'après [KM, Lemma 2.8] la nullité du conoyau C équivaut à l'hypothèse de ramification de l'énoncé. $\square$

Remarque. Il est également possible de construire ces applications entre noyaux sauvages et groupes de classes en passant par le groupe des classes logarithmiques introduit par J.-F. Jaulent (cf. [J3]). La proposition précédente est alors immédiate.

Chapitre 2

Théorie d'Iwasawa et noyaux sauvages étales

Le but de ce chapitre est de présenter dans un premier temps certains résultats classiques de théorie d'Iwasawa des $\mathbb{Z}_p$-extensions auxquels nous ferons appel dans la suite. Nous nous inspirons des expositions de ces résultats faites dans [NSW], [Ko1] ou [W]. Dans un second temps, nous faisons le lien avec le premier chapitre en rappelant un théorème de P. Schneider qui établit un isomorphisme entre les noyaux sauvages étales et un certain module d'Iwasawa.

2.1 $\mathbb{Z}_p$-extensions

Etant donné un nombre premier p, une $\mathbb{Z}_p$-extension d'un corps F est une extension galoisienne F_∞/F telle que $\mathrm{Gal}(F_\infty/F)$ est topologiquement isomorphe à $(\mathbb{Z}_p, +)$, le groupe additif des entiers p-adiques.

La famille des sous-groupes fermés du pro-p-groupe $\mathbb{Z}_p$ étant particulièrement simple, il en est de même, par correspondance galoisienne, de la famille des sous extensions de F_∞ contenant F. Les seuls sous-groupes fermés de $\mathbb{Z}_p$ sont de la forme $\{0\}$ ou $p^n\mathbb{Z}_p$ pour un entier $n \geq 0$. Ainsi, pour tout $n \geq 0$, il existe un unique corps F_n de degré p^n sur F et contenu dans F_∞ ; les corps F_n et F_∞ sont les seuls contenus dans l'extension F_∞/F.

En résumé une $\mathbb{Z}_p$-extension peut être vue comme une union

$$F := F_0 \subset F_1 \subset \cdots F_n \subset F_{n+1} \cdots \subset F_\infty = \bigcup_{n \geq 0} F_n,$$

où $\mathrm{Gal}(F_n/F) \simeq \mathbb{Z}/p^n$.

Exemples

– Soit F un corps local ou global de caractéristique différente de p. Pour tout entier $n \geq 0$, désignons par μ_{p^n} le groupe des racines p^n-ièmes de l'unité et $\mu_{p^\infty} = \bigcup_{n\geq 0} \mu_{p^n}$. Posons $E_\infty = F(\mu_{p^\infty})$. On a alors $\mathrm{Gal}(E_\infty/F) \simeq \mathbb{Z}_p \times \Delta$, où Δ est un groupe abélien fini. Considérons alors le corps $F_\infty := E_\infty^\Delta$. L'extension F_∞/F est la $\mathbb{Z}_p$-*extension cyclotomique* de F. Pour résumer, on a le diagramme

$$\begin{tikzcd} F_\infty \arrow[r, dash, "\Delta"] \arrow[d, dash, "\mathbb{Z}_p"'] & E_\infty \arrow[d, dash, "\mathbb{Z}_p"] \\ F \arrow[r, dash, "\Delta"] & F(\mu_{2p}) \end{tikzcd}$$

– Soient ℓ un nombre premier et F une extension finie de $\mathbb{Q}_\ell$. La pro-p-extension abélienne non-ramifiée maximale de F est une $\mathbb{Z}_p$-extension. Elle coïncide avec la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique si et seulement si $p \neq \ell$.

Lorsque F est un corps de nombres, la ramification dans l'extension F_∞/F obéit à des règles strictes comme le montre la proposition suivante.

Proposition 2.1.1. *Une $\mathbb{Z}_p$-extension F_∞/F d'un corps de nombres F est p-ramifiée. En outre, il existe au moins un premier qui se ramifie dans F_∞/F. Enfin tout premier ramifié se ramifie totalement dans une certaine extension F_∞/F_n.*

Remarque. Dans la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de F, tous les premiers de F divisant p sont ramifiés.

Soient ℓ un nombre premier et F une extension finie de $\mathbb{Q}_\ell$. La théorie du corps de classes local nous donne le nombre de $\mathbb{Z}_p$-extensions linéairement indépendantes de F :

– si $p \neq \ell$ alors F admet une unique $\mathbb{Z}_p$-extension.
– si $p = \ell$ alors le nombre de $\mathbb{Z}_p$-extensions indépendantes est $1 + [F : \mathbb{Q}_p]$.
Soient F un corps de nombres et r_2 le nombre de places complexes de F. La théorie du corps de classes global nous permet de montrer que le nombre de $\mathbb{Z}_p$-extensions indépendantes de F est $1 + r_2 + \delta_F$, où δ_F est un entier positif ou nul. L'entier δ_F est appelé défault de Leopoldt. La conjecture de Leopoldt pour F en p prédit que $\delta_F = 0$. Il est connu que $\delta_F = 0$ lorsque $F/\mathbb{Q}$ est abélienne.

2.2 L'algèbre d'Iwasawa

2.2.1 Présentation de l'algèbre d'Iwasawa

Désignons par Γ un groupe multiplicatif topologiquement isomorphe au groupe additif $\mathbb{Z}_p$ et fixons un générateur topologique γ de Γ. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose
$$G_n = \Gamma/\Gamma^{p^n} \simeq \mathbb{Z}/p^n.$$
Le groupe Γ_n est un groupe cyclique d'ordre p^n engendré par l'image de γ.

Considérons l'algèbre de groupe $\mathbb{Z}_p[G_n]$. Pour tous entiers $m \geq n \geq 0$ on a une application
$$\mathbb{Z}_p[G_m] \to \mathbb{Z}_p[G_n]$$
induite par l'application naturelle $\Gamma_m \to \Gamma_n$.

On définit alors l'algèbre de groupe complète
$$\mathbb{Z}_p[[\Gamma]] := \varprojlim \mathbb{Z}_p[G_n].$$

L'algèbre $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ est appelée *algèbre d'Iwasawa*. Elle se décrit bien au moyen de séries formelles. C'est ce que nous allons détaillet dans ce qui suit.

Pour tout entier $n \geq 0$ on pose $\omega_n := (1+T)^{p^n} - 1$. On a un isomorphisme
$$\mathbb{Z}_p[G_n] \simeq \mathbb{Z}_p[T]/(\omega_n),$$
induit par l'application :
$$\gamma \bmod \Gamma^{p^n} \mapsto 1 + T \bmod(\omega_n).$$

Pour tous entiers $m \geq n \geq 0$ on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}_p[G_m] \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}_p[T]/(\omega_m) \arrow[d] \\ \mathbb{Z}_p[G_n] \arrow[r] & \mathbb{Z}_p[T]/(\omega_n) \end{tikzcd}$$

où la flèche verticale de droite est induite par la réduction modulo ω_n. En effet ω_n divise ω_m. On a ainsi clairement

$$\mathbb{Z}_p[[\Gamma]] \simeq \varprojlim \mathbb{Z}_p[T]/(\omega_n).$$

On va identifier dans ce qui suit l'algèbre d'Iwasawa et l'algèbre des séries formelles $\mathbb{Z}_p[[T]]$.

Posons $\Lambda := \mathbb{Z}_p[[T]]$. Il est bien connu que Λ est un anneau local noethérien d'idéal maximal (p, T), de corps résiduel $\mathbb{F}_p$ et complet pour la topologie (p, T)-adique.

On donne maintenant un analogue de la division euclidienne dans l'anneau Λ.

Proposition 2.2.1. *Soit*

$$f(T) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i T^i \in \Lambda,$$

tel que pour un certain s on a $a_i \in p\mathbb{Z}_p$ pour $0 \leq i \leq s-1$ et $a_s \in \mathbb{Z}_p^\times$. Alors tout élément $g \in \Lambda$ peut s'écrire de façon unique $g = qf + r$, où $q \in \Lambda$ et où $r \in \mathbb{Z}_p[T]$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $s-1$.

Rappelons qu'un polynôme $P(T) \in \mathbb{Z}_p[T]$ est *distingué* si tous ses coefficients autres que le coefficient dominant sont divisibles par p.

Théorème 2.2.2. ***(Théorème de préparation de Weierstrass)*** *Soit $f \in \Lambda$. Si f est non nul alors f s'écrit de manière unique sous la forme*

$$f = p^\mu P U,$$

où μ est un entier positif, $U \in \Lambda^\times$ et P est un polynôme distingué.

Le résultat suivant nous permet d'identifier explicitement l'algèbre de groupe $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ et l'algèbre de séries formelles Λ.

Théorème 2.2.3. *L'application $\gamma \mapsto 1+T$ induit un isomorphisme topologique*

$$\mathbb{Z}_p[[\Gamma]] \simeq \mathbb{Z}_p[[T]].$$

Démonstration. On a vu dans ce qui précède que l'application $\gamma \mapsto 1+T$ induit un isomorphisme $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]] \simeq \varprojlim \mathbb{Z}_p[T]/(\omega_n)$. Comme les polynômes ω_n sont distingués on a en outre un isomorphisme

$$\mathbb{Z}_p[[T]] \simeq \varprojlim \mathbb{Z}_p[T]/(\omega_n).$$

Considérons alors l'application suivante

$$\Phi : \Lambda = \mathbb{Z}_p[[T]] \to \mathbb{Z}_p[[T]]/(\omega_n).$$

On montre par récurrence que $\omega_n \in (p,T)^{n+1}$ d'où

$$\ker \Phi = \bigcap_{n \geq 0} (\omega_n) = \bigcap_{n \geq 0} (p,T)^{n+1} = 0.$$

Comme Λ est complet on voit facilement que Φ est surjective et donc bijective. Enfin, par continuité de Φ et compacité de Λ il est clair que Φ est un isomorphisme topologique. $\square$

Dans la suite on identifie l'algèbre d'Iwasawa $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ à l'algèbre de séries formelles Λ.

Décrivons enfin la famille des idéaux premiers dans Λ.

Lemme 2.2.4. *Etant donnés deux éléments f et g de Λ premiers entre eux, l'idéal (f,g) est d'indice fini dans Λ.*

Théorème 2.2.5. *Les idéaux premiers de Λ sont 0, (p,T), (p) et les idéaux $(P(T))$, où $P(T)$ est un polynôme distingué irréductible.*

Le théorème précédent montre que la dimension de Krull de Λ est 2.

2.2.2 Structure des Λ-modules de type fini

Commençons par rappeler le résultat suivant :

Lemme 2.2.6. ***(de Nakayama)*** *Soit M un Λ-module topologique compact.*

1. *Si $(p, T)M = M$ alors $M = 0$.*
2. *Si $M/(p, T)$ est de type fini alors M est également de type fini, engendré par toute famille de représentants d'une famille génératrice de $M/(p, T)$.*

On donne dans la suite un théorème de structure pour les Λ-modules de type fini analogue au théorème de structure des modules de type fini sur un anneau principal. Le *défaut* de principalité de l'anneau Λ ne nous donne pas la classification de tels modules à isomorphisme près mais seulement à *pseudo-isomorphisme* près. Rappelons dans un premier temps cette notion.

Définition 2.2.7. *Soient M et N des Λ-modules de type fini. On dit que M est pseudo-isomorphe à N si il existe un Λ-morphisme $f : M \to N$ tel que $\ker(f)$ et $\operatorname{coker}(f)$ sont finis. La relation "M est pseudo-isomorphe à N" définit une relation binaire sur la famille des Λ-modules de type fini que l'on note $M \sim N$.*

Remarque. En général la relation $\sim$ n'est pas symétrique. Cependant on peut montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur la famille des Λ-modules de type fini et de torsion.

Théorème 2.2.8. ***(de Structure)*** *Soit M un Λ-module de type fini. Alors il existe des entiers $r \geq 0$, $n \geq 0$ et $m \geq 0$ ainsi que des familles d'entiers positifs $(m_j)_{j=1..m}$, $(n_i)_{i=1..n}$ et une famille de polynômes distingués irréductibles $(f_i)_{i=1..n}$ tels que*

$$M \sim \Lambda^r \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} \Lambda/(f_i)^{n_i} \oplus \bigoplus_{j=1}^{m} \Lambda/(p)^{m_j}.$$

On a unicité d'une telle décomposition à permutation près.

On introduit les notations suivantes :

$\mu(M) := \sum_{j=1}^{m} m_j$ l'invariant μ de M.

$\lambda(M) := \sum_{i=1}^{n} n_i \deg(f_i)$ l'invariant λ de M.

$car(M) := p^{\mu(M)}\Pi_{i=1}^{n} f_i^{n_i}$ le polynôme caractéristique de M.
Dans la suite tout Λ-module de la forme

$$\Lambda^r \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} \Lambda/(f_i)^{n_i} \oplus \bigoplus_{j=1}^{m} \Lambda/(p)^{m_j},$$

est appelé Λ-module *élémentaire.*

Proposition 2.2.9. *Soient M un Λ-module de type fini et de torsion et $g \in \Lambda$. Alors M/gM est fini si et seulement si g et $car(M)$ n'ont pas de diviseur commun.*

Soit M un Γ-module compact. La structure de module sur l'algèbre Λ nous permet d'étudier l'action du pro-p-groupe Γ sur M.

Ainsi d'une part on a les co-invariants

$$M_\Gamma \simeq M/(\omega_0),$$

et d'autre part on a les invariants

$$M^\Gamma \simeq \ker(M \xrightarrow{T} M).$$

Rappelons dans un premier temps la suite exacte classique des invariants-co-invariants.

Proposition 2.2.10. *Etant donnée une suite exacte courte de $\mathbb{Z}_p[\Gamma]$-modules*

$$0 \to A \to B \to C \to 0,$$

on a la suite exacte de $\mathbb{Z}_p$-modules.

$$0 \to A^\Gamma \to B^\Gamma \to C^\Gamma \to A_\Gamma \to B_\Gamma \to C_\Gamma \to 0.$$

La proposition suivante nous sera utile. C'est une conséquence du lemme de Nakayama.

Proposition 2.2.11. *Soit M un Λ-module. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) M est de type fini sur Λ.

(ii) M_Γ est de type fini sur $\mathbb{Z}_p$.

On peut s'intéresser au cas où les $\mathbb{Z}_p$-modules M_Γ et M^Γ sont *finis*. On définit alors le *quotient de Herbrand* d'un Γ-module M par la formule

$$h(M) := \frac{|M^\Gamma|}{|M_\Gamma|}.$$

Proposition 2.2.12. *Soit M un Λ-module de type fini et de torsion. Alors les propositions suivantes sont équivalentes.*

1. *M^Γ est fini.*
2. *M_Γ est fini.*
3. *$car(M)(0) \neq 0$.*

Sous l'une de ces conditions on a l'égalité

$$h(M) = p^{-v_p(car(M)(0))}.$$

2.2.3 Groupes de Galois et Λ-modules

Pour tout entier naturel $n \geq 0$, considérons M_n un $\mathbb{Z}_p[G_n]$-module et un morphisme $M_{n+1} \to M_n$ compatible avec les actions de $\mathbb{Z}_p[G_{n+1}]$ et $\mathbb{Z}_p[G_n]$. La limite projective

$$M := \varprojlim M_n,$$

est un Λ-module. Si tous les modules M_n sont compacts alors il en est de même de M.

On revient maintenant dans le cadre de l'arithmétique des corps de nombres. Soit F un corps de nombres, S un ensemble fini de places de F et $F_\infty = \bigcup_{n\geq 1} F_n$ une $\mathbb{Z}_p$-extension de F. On note $\Gamma_n := \mathrm{Gal}(F_\infty/F_n)$, avec les conventions $F = F_0$ et $\Gamma = \Gamma_0$. Enfin pour tous $m \geq n \geq 0$, on note toujours $G_{m,n} := \mathrm{Gal}(F_m/F_n) \simeq \Gamma_n/\Gamma_m$, avec la convention $G_n := G_{n,0}$. On forme alors la limite projective

$$\Lambda := \Lambda_\Gamma = \varprojlim \mathbb{Z}_p[G_n].$$

Si l'on considère une famille $(X_n)_{n\geq 0}$ de $\mathbb{Z}_p[G_n]$-modules fonctoriellement attachée à la famille des corps $(F_n)_{n\geq 1}$, on forme naturellement le Λ-module

$$X := \varprojlim X_n,$$

où la limite est prise sur les morphismes de norme.

Le point de vue de la théorie d'Iwasawa est l'étude de X en tant que Λ-module ; celle-ci nous donne par descente des résultats sur les modules initiaux X_n, en comparant par exemple ceux-ci avec les co-descendus X_{Γ_n}.

Intéressons nous pour l'instant, au cas où la famille $(X_n)_{n\geq 1}$ est la famille des p-groupes abéliens A_n^S, où A_n^S désigne la p-partie du S-groupe des classes de F_n. Formons alors le Λ-module

$$\varprojlim A_n^S,$$

où la limite inverse est prise sur les morphismes de normes. On donne dans ce qui suit une interprétaion galoisienne de ce module.

La théorie du corps de classes global nous permet d'identifier le groupe A_n^S et la p-partie du groupe de Galois du S-corps de classes de Hilbert de F_n (i.e. l'extension abélienne non ramifiée, S-décomposée maximale de F_n).

Soit L_∞^S la pro-p-extension abélienne non ramifiée, S-décomposée maximale de F_∞ et $X_\infty^S := \mathrm{Gal}(L_\infty^S/F_\infty)$. L'extension L_∞^S/F est galoisienne (par des arguments de maximalité). On obtient l'extension de groupes :

$$0 \to X_\infty^S \to \mathrm{Gal}(L_\infty^S/F) \to \Gamma \to 0.$$

Lorsque l'ensemble S est uniquement constitué des places p-adiques et des places à l'infini de F nous utilisons la notation usuelle

$$X_\infty^S = X'_\infty.$$

Comme X_∞^S est abélien, Γ opère continûment par automorphismes intérieurs sur X_∞^S conférant à ce dernier une structure de module sur l'algèbre Λ.

Proposition 2.2.13. *On a un isomorphisme de Λ-module*

$$X_\infty^S \simeq \varprojlim A_n^S.$$

En outre X_∞^S est de type fini sur Λ.

Intéressons-nous aux invariants de structure de

$$X_\infty^S \sim \Lambda^r \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} \Lambda/(f_i)^{n_i} \oplus \bigoplus_{j=1}^{m} \Lambda/(p)^{m_j}.$$

- L'invariant r est nul (i.e. X_∞^S est un Λ-module de torsion).
- Lorsque F_∞/F est la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique on a $X_\infty^S \simeq X'_\infty$ (et donc $\lambda^S = \lambda'$) si S contient S_p.
- L'invariant $\mu_S := \sum_{j=1}^m m_j$ est nul si et seulement si $r_{\mathbb{F}_p}(A_n^S)$ est borné indépendamment de n. Posons $\mu = \mu_S$ lorsque $S = \emptyset$. Si $\mu = 0$ alors $\mu_S = 0$ pour tout ensemble fini S de places de F. Lorsque $F/\mathbb{Q}$ est abélienne et F_∞ est la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de F, B. Ferrero et L. Washington ont montré que $\mu = 0$ (cf. [FW]). La trivialité de μ dans le cas cyclotomique est conjecturée pour tout corps de nombres. Si $\mu_S = 0$ alors

  $$X_\infty^S \simeq \mathbb{Z}_p^\lambda \oplus A,$$

  où A est un groupe abélien fini.
  Enfin, K. Iwasawa a construit des $\mathbb{Z}_p$-extensions non cyclotomiques pour lesquelles l'invariant μ est strictement positif (cf. [Iw1]).

- Iwasawa a utilisé les invariants de structure de X_∞^S pour calculer la p-partie du nombre de S-classes dans la $\mathbb{Z}_p$-extension F_∞/F. Rappelons le resultat :
  Théorème 2.2.14. *Soit S un ensemble fini de places de F. Il existe un triplet $(\mu_S, \lambda_S, \nu_S)$ d'entiers positifs ou nuls, tel que pour tout $n \gg 0$,*

  $$|A_n^S| = p^{\mu_S p^n + \lambda_S n + \nu_S}.$$

2.2.4 L'algèbre d'Iwasawa généralisée $\Lambda[\Delta]$

Il est possible de se placer dans une situation arithmétique plus précise. On obtient alors une structure supplémentaire pour les Λ-modules (cf par exemple [J1, Chapitres 3 et 4]).

Dans toute cette section, on fait l'hypothèse que p est un nombre premier *impair.*

Le schéma de corps de nombres est le suivant : le corps F étant fixé, on note E une extension abélienne de F, de groupe de Galois $\Delta = \mathrm{Gal}(E/F)$, de degré d premier à p, et contenant le groupe μ_p.

L'entier d étant inversible dans $\mathbb{Z}_p$, on associe à chaque caractère p-adique absolument irréductible ϕ de Δ un idempotent primitif de l'algèbre $\mathbb{Z}_p[\Delta]$.

Celui-ci est donné par la formule :

$$e_\phi = \frac{1}{d}\sum_{\tau\in\Delta}\phi(\tau^{-1})\tau.$$

On obtient alors la décomposition semi-locale de l'algèbre :

$$\mathbb{Z}_p[\Delta] = \oplus_\phi e_\phi \mathbb{Z}_p[\Delta] = \oplus_\phi \mathbb{Z}_p(\phi).$$

où le facteur isotypique $\mathbb{Z}_p(\phi)$ s'identifie à l'anneau local des entiers d'une extension non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$.

L'algèbre $\mathbb{F}_p[\Delta]$ admet de même une décomposition semi-simple :

$$\mathbb{F}_p[\Delta] = \oplus_\phi \bar{e}_\phi \mathbb{F}_p[\Delta] = \oplus_\phi \mathbb{F}_p(\phi).$$

où le facteur isotypique $\mathbb{F}_\phi$ s'identifie à une extension finie $\mathbb{F}_p(\phi)/\mathbb{F}_p$ et les idempotents $\bar{e}_\phi$ proviennent des idempotents e_ϕ par réduction modulo p.

Tout $\mathbb{Z}_p[\Delta]$-module admet une décomposition semi-locale :

$$M = \oplus_\phi e_\phi M.$$

On appelle aussi *ϕ-composante de M*, la composante isotypique $e_\phi M$ du module M. Elle admet la description suivante :

$$e_\phi M = \{m \in M \otimes \mathbb{Z}_p(\phi),\ \forall \tau \in \Delta, \tau m = \phi(\tau)m\}.$$

Parmi les caractères de Δ, on dispose des caractères remarquables suivants :
- le caractère unité 1,
- le caractère cylotomique (ou caractère de Teichmüller) ω. C'est l'unique caractère ϕ, tel que

$$\mu_p = e_\phi \mu_p.$$

Dans la suite nous serons amenés à considérer le cas $E = F(\mu_p)$ de degré d divisant $p-1 = [\mathbb{Q}(\mu_p) : \mathbb{Q}]$. Le groupe Δ est alors cyclique, engendré par le caractère cyclotomique ω. Les caractères irréductibles de Δ sont ainsi donnés par les puissances du caractère cyclotomique $(\omega^i)_{i=1,\cdots,d}$.

Les $\mathbb{Z}_p[\Delta]$-modules X_{F_n} et X_{E_n} que nous considérerons sont fonctoriellement attachés à la famille des extensions E_n/F_n. Les applications naturelles de norme N_{E_n/F_n} et d'extension e_{E_n/F_n} vérifient les identités :

$$N_{E_n/F_n} \circ e_{E_n/F_n} = d, \text{ et } e_{E_n/F_n} \circ N_{E_n/F_n} = \sum_{\tau\in\Delta}\tau.$$

Ainsi, comme p et d sont premiers entre eux, les modules X_{F_n} s'identifient via e_{E_n/F_n} (resp. N_{E_n/F_n}) aux modules $(X_{E_n})^{\Delta} = e_1 X_{E_n}$ (resp. $(X_{E_n})_{\Delta} = X_{E_n}/e_1 X_{E_n}$.

Nous allons considérer la situation suivante : l'extension E/F est définie comme précédemment et l'extension $F(\mu_{p^\infty})/F$ est procyclique (cette condition est automatiquement vérifiée lorsque p est impair). La $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique E_∞ est abélienne sur F. Il est alors possible de retrouver les invariants de F à partir de ceux de E, à l'aide de la décomposition semi-locale de $\mathbb{Z}_p[\Delta]$. L'algèbre généralisée $\Lambda[\Delta]$ est l'algèbre de Δ à coefficients dans Λ. La décomposition de $\mathbb{Z}_p[\Delta]$ se relève en une décomposition semi-simple pour Λ :

$$\Lambda[\Delta] = \oplus_\phi e_\phi \Lambda[\Delta] = \oplus_\phi \Lambda(\phi),$$

où le facteur isotypique $\Lambda(\phi)$ est un Λ-module libre et un anneau local, nothérien et complet, de dimension 2. Il s'identifie à l'algèbre de séries formelles $\mathbb{Z}_p(\phi)[[T]]$.

Enfin, pour un exposé du cas où l'extension E_∞/F n'est pas nécessairement abélienne, on peut consulter [J1, chapitre 3].

Nous donnons deux propriétés sur le foncteur $M \mapsto e_\phi M$ qui nous serons utiles dans la suite.

Proposition 2.2.15. *Etant donnés ϕ un caractère irréductible de Δ et une suite exacte de $\Lambda[\Delta]$-modules :*

$$0 \to M \to M' \to M'' \to 0, \tag{2.2.1}$$

on a une suite exacte de $\Lambda(\phi)$-modules :

$$0 \to e_\phi M \to e_\phi M' \to e_\phi M'' \to 0. \tag{2.2.2}$$

De plus, si la suite 2.2.1 est scindée en tant que suite de groupes abéliens alors 2.2.2 l'est également.

2.3 L'isomorphisme de Schneider

2.3.1 Λ-modules tordus

Dans cette section on considère un corps de nombres F et $E = F(\mu_p)$, ainsi que $E_\infty = E(\mu_{p^\infty})$ la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de E. On note $G_\infty := \mathrm{Gal}(E_\infty/F)$ et $\Delta := \mathrm{Gal}(E/F)$. On pose enfin $\Gamma := \mathrm{Gal}(E_\infty/E)$. On a alors le produit direct $G_\infty = \Gamma \times \Delta$. Pour résumer, on a le schéma de corps suivant :

$$\begin{tikzcd}
& & L'_\infty \arrow[dl, dash] \arrow[dl, bend right, dash, "X'_\infty"'] \\
& E_\infty \arrow[d, dash] \arrow[d, bend left, dash, "\Gamma"] & \\
F \arrow[r, dash, "\Delta"] & E &
\end{tikzcd}$$

où L'_∞ désigne la pro-p-extension non ramifiée, p-décomposée maximale de E_∞ et $X'_\infty := \mathrm{Gal}(L'_\infty/E_\infty)$.

Définition 2.3.1. *L'opération de G_∞ sur le groupe μ_{p^∞} définit un morphisme*

$$\rho : G_\infty \longrightarrow \mathbb{Z}_p^*,$$

que l'on appelle caractère cyclotomique.

Pour tout $\sigma \in G_\infty$ et toute racine p^n-ième de l'unité ζ_{p^n}, on a l'égalité

$$\sigma(\zeta_{p^n}) = \zeta_{p^n}^{\rho(\sigma)}.$$

L'opération de G_∞ sur le groupe μ_p coïncide avec le caractère de Teichmüller ω. La restriction de ρ au sous-groupe Γ sera notée κ. On a ainsi l'inclusion $\kappa(\Gamma) \subseteq (1 + p\mathbb{Z}_p) \simeq \mathbb{Z}_p$ et une décomposition :

$$\rho = \kappa\omega.$$

Le morphisme κ est naturellement défini sur le groupe $\Gamma_F := \mathrm{Gal}(F_\infty/F)$ puisqu'on a un isomorphisme canonique $\Gamma \xrightarrow{\simeq} \Gamma_F$.

Soient M un $\mathbb{Z}_p[G_\infty]$-module et $i \in \mathbb{Z}$. Le i-ième tordu à la Tate $M(i)$ de M, est défini comme étant le module M muni de l'action de G_∞ définie de la manière suivante :

Pour tout $m \in M$ et tout $\sigma \in G_\infty$

$$\sigma *_{(i)} m = \rho(\sigma)^i(\gamma m).$$

Lorsque $\rho(G_\infty) \subseteq 1 + p\mathbb{Z}_p$ (i.e. $\Delta = 1$), on prolonge cette définition à tous les entiers $i \in \mathbb{Z}_p$.

Les $\mathbb{Z}_p[G_\infty]$-modules M et $M(i)$ sont reliés par la relation :

$$M(i) = M \otimes \mathbb{Z}_p(i).$$

Si M est un $\Lambda[\Delta]$-module de type fini alors tous les tordus $M(i)$ admettent une stucture de $\Lambda[\Delta]$-module de type fini. Il est possible de comparer leurs polynômes caractéristiques respectifs.

Proposition 2.3.2. *Soit $f(T)$ le polynôme caractéristique d'un Λ-module de torsion et de type fini M. Alors pour tout $i \in \mathbb{Z}_p$,*

$$car(M(i)) = f(\kappa(\gamma)^{-i}(1+T) - 1).$$

On a également la relation entre composantes isotypiques pour tout caractère p-adique irréductible ϕ de Δ :

$$e_\phi\left(M(i)\right) = \left(e_{\omega^{-i}\phi} M\right)(i)$$

On termine cette partie par un lemme qui nous sera utile dans la suite :

Lemme 2.3.3.

$$H^n(\Gamma, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i)) = \begin{cases} 0 & si\ n \geq 2 \\ 0 & si\ n \geq 1 et\ i \neq 0 \\ \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p & si\ n = 1\ \ et\ i = 0 \end{cases}$$

Démonstration. Pour $n \geq 2$, la trivialité de $H^n(\Gamma, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))$ résulte du fait que Γ a pour p-dimension cohomologique $\mathrm{cd}_p(\Gamma) = 1$.

Pour i non nul, démontrons la trivialité de $H^1(\Gamma, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))$. Celle-ci est équivalente, par dualité, à la trivialité de $(\mathbb{Z}_p(-i))^\Gamma$. Le polynôme caractéristique $car(\mathbb{Z}_p)$ est T, donc

$$car(\mathbb{Z}_p(-i)) = \kappa(\gamma)^i(1+T) - 1.$$

Le groupe $(\mathbb{Z}_p(-i))^\Gamma$ est fini si et seulement si $\kappa(\gamma)^i(1+T) - 1$ et T sont étrangers. Cette dernière assertion équivaut à $\kappa(\gamma)^i \neq 1$. Celle-ci est toujours vérifiée dès que $i \neq 0$. $\square$

Remarque. La trivialité de $H^1(\Gamma, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))$ pour i non nul est appelée *lemme de Tate* et affirme essentiellement la trivialité cohomologique des racines de l'unité dans la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique. Plus précisement, on a la proposition suivante :

Proposition 2.3.4. *Soient F un corps de nombres, n un entier positif et $G_n := \mathrm{Gal}(F(\mu_{p^n})/F)$. Lorsque $p = 2$ on suppose que $\mu_4 \subseteq F$. Alors le G_n-module μ_{p^n} est cohomologiquement trivial.*

2.3.2 Le théorème d'isomorphisme

Fixons une $\mathbb{Z}_p$-extension F_∞ d'un corps de nombres F. On définit naturellement des Λ-modules en considérant la limite projective dans F_∞/F, relativement aux morphismes de normes, des groupes de K-théorie définis dans le premier chapitre.

Nous allons nous intéresser précisément à l'un d'entre eux :

$$\varprojlim WK_{2i}^{ét}(F_n).$$

Par dualité de Poitou-Tate et montée dans $F(\mu_{p^\infty})$, P. Schneider donne une description de ce Λ-module en termes de groupes de Galois. Il en tire ainsi une description de $WK_{2i}^{ét}(F)$ en termes de co-invariants d'un module d'Iwasawa tordu.

Ce résultat, fondamental dans cette thèse, fait le lien entre K-théorie des anneaux d'entiers, théorie d'Iwasawa des $\mathbb{Z}_p$-extension et pro-p-groupes de Galois. Dans le quatrième chapitre, c'est le point de départ de l'étude du groupe $\mathcal{G}'_\infty$ (cf. chapitre 4) par le biais des noyaux sauvages étales.

On a le théorème (cf. [S], 6 Lemma 1) suivant :

Théorème 2.3.5. *Soit S l'ensemble des places de F contenant les places à l'infini et les places p-adiques. Lorsque $p=2$, on suppose de plus que $\mu_4 \subseteq F$. Pour tout entier $i \in \mathbb{Z}$ non nul il existe un isomorphisme canonique :*

$$Ш^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i+1)) \simeq (X'_\infty(i))_{G_\infty}$$

Démonstration. Il suffit de démontrer le théorème pour E. Le résultat pour F provient alors simplement de la co-descente galoisienne dans l'extension E/F de degré premier à p.

La suite exacte d'inflation-restriction associée à l'extension de groupes

$$0 \to G_S(E_\infty) \to G_S(E) \to \Gamma \to 0,$$

ainsi que le lemme précédent nous permettent d'écrire l'isomorphisme pour i non nul :

$$H^1(G_S(E), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(-i)) \simeq H^1(G_S(E_\infty), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)(-i)^\Gamma.$$

De même pour les localisés on a :

$$H^1(G_S(E_v), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(-i)) \simeq H^1(G_S(E_{v,\infty}), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)(-i)^\Gamma.$$

Enfin le noyau

$$\ker\left(H^1(G_S(E_\infty), \mu_{p^\infty}) \to \oplus_{v\in S}(H^1(E_{v,\infty}, \mu_{p^\infty}))\right)$$

s'identifie par la théorie de Kummer à $\mathrm{Hom}(X'_\infty, \mu_{p^\infty})$.

On a ainsi montré l'isomorphisme :

$$Ш^1_S(E, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(-i)) \simeq \mathrm{Hom}(X'_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)(-i)^\Gamma.$$

On a donc par dualité de Poitou-Tate :

$$\begin{aligned} Ш^2_S(E, \mathbb{Z}_p(i+1)) &\simeq (Ш^1_S(E, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(-i)))^* \\ &\simeq (\mathrm{Hom}(X'_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)(-i)^\Gamma)^* \\ &\simeq (X'_\infty(i))_\Gamma . \end{aligned}$$

□

Remarques.

1. D'une manière général, exprimé sur les "co"-composantes isotypiques, le théorème 2.3.5 donne :

$$Ш^2_S(E, \mathbb{Z}_p(i+1))/e_\phi \simeq ([X'_\infty/e_\phi X'_\infty](i))_\Gamma.$$

   En particulier, pour tout entier $i \equiv 0 \bmod d$, on a

$$Ш^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i+1)) \simeq \left(X'_{F_\infty}(i)\right)_{\Gamma_F},$$

   où $\Gamma_F = \mathrm{Gal}(F_\infty/F) \simeq \Gamma$.

2. Le résultat s'étend sans peine a tous les $i \in \mathbb{Z}_p$ dès que $\Delta = 0$.
3. Il y a une "singularité" pour $i = 0$: le co-descendu de X'_∞ ne coïncide pas avec $Ш^2_S(F, \mathbb{Z}_p(1))$ (qui s'identifie, lui, au p-groupe des p-classes de F).
4. On remarque que pour $i \neq 0$, le groupe $Ш^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i+1))$ ne dépend pas de l'ensemble S contenant $S_p \cup S_\infty$.

T. Nguyen Quang Do propose la notation unifiée suivante :

Définition 2.3.6. *Pour tout $i \in \mathbb{Z}$ on pose,*

$$\mathcal{H}^{ét}_{2i}(F) := (X'_{E_\infty}(i))_{G_\infty}.$$

Lorsque $E = F$, on prolonge cette notation au cas $i \in \mathbb{Z}_p$. On appelle toujours $\mathcal{H}^{ét}_{2i}(F)$, le $2i$*-ième noyau sauvage étale.* C'est un p-groupe abélien de type fini.

Définition 2.3.7. *On appelle $C_i(F)$ l'énoncé suivant :*

$$\mathcal{H}^{ét}_{2i}(F) \text{ est fini.}$$

Dans [KNF] les auteurs étudient différentes formes de $C_i(F)$. En particulier, on a les interprétations suivantes :

- Pour tout entier $i \geq 1$, on a $\mathcal{H}^{ét}_{2i}(F) \simeq WK^{ét}_{2i}(F)$. L'énoncé $C_i(F)$ est vrai et résulte de la finitude des noyaux sauvages de la K-théorie des anneaux d'entiers.
- Pour $i = 0$, la théorie p-adique du corps de classes nous permet d'identifier $\mathcal{H}^{ét}_0(F)$ au groupe des classes logarithmiques de $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F$ (cf. [J4]). En particulier, l'énoncé $C_0(F)$ équivaut à la conjecture de Gross pour F en p.

– Pour $i = -1$, le groupe $\mathcal{H}^{ét}_{-2}(F)$ s'identifie au radical kummérien suivant :

$$\mathcal{H}^{ét}_{-2}(F) = \{p^{-k} \otimes x \in \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \otimes F^\times, E_\infty[\sqrt[p^k]{x}] \subseteq L'_\infty\}.$$

L'énoncé $C_{-1}(F)$ équivaut à la conjecture de Leopoldt pour F en p (cf par exemple [JMi]).

– Pour tout entier $i < -1$, l'énoncé $C_i(F)$ est conjecturé par P. Schneider (cf [S]). Il équivaut à la trivialité de $H^2(G_F^S, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i+1))$.

Remarque. On a $\mathcal{H}^{ét}_{2i}(F) \simeq (\mathcal{H}^{ét}_{2i}(E))^\Delta$.

2.3.3 Quelques conséquences

Dans cette dernière section on donne quelques conséquences immédiates du théorème précédent (cf [S], [N4] ou [JMi]).

Proposition 2.3.8. *Soit F un corps de nombres. L'énoncé $C_i(F)$ est vrai pour presque tout $i \in \mathbb{Z}$ (i.e. tous sauf un nombre fini).*

Démonstration. Montrons que $C_i(E)$ est vraie pour presque tout $i \in \mathbb{Z}_p$. Posons $f_i(T) := car(X'_\infty(i))$. D'après la proposition 2.3.2, on a $f_i(T) = f_0(\rho(\gamma)^{-i}(1+T)-1)$. D'autre part $(X'_\infty(i))_\Gamma$ est fini si et seulement si $f_i(0) = f_0(\rho(\gamma)^{-i} - 1) \neq 0$. Or $f_0(T)$ ne s'annule qu'en un nombre fini de valeurs de T. □

Remarque. Lorsque $\Delta = 0$, on peut considérer l'énoncé $C_i(E)$ pour tout $i \in \mathbb{Z}_p$. Comme le montre l'exemple suivant, l'énoncé $C_i(E)$ peut-être facilement mis en défaut. Posons $E = \mathbb{Q}(\mu_p)$ avec $p = 37$. Il est connu que $X'_\infty \simeq \mathbb{Z}_p$ (cf. [W], Corollary 10.17). Soit $T - a$ le polynôme distingué de X'_∞. Le polynôme $T - a$ est distingué donc $a \in p\mathbb{Z}_p$. De plus, le corps E est abélien sur $\mathbb{Q}$; il satisfait donc la conjecture de Gross en p. Ainsi a n'est pas nul.

D'après le théorème de structure 2.2.8, on a l'injection :

$$X'_\infty \hookrightarrow \Lambda/(T-a) =: M.$$

On a alors les équivalences :

$$\begin{aligned} C_i(E) &\Leftrightarrow M(i)_\Gamma \text{ est fini.} \\ &\Leftrightarrow car(M(i))(0) \neq 0. \\ &\Leftrightarrow \kappa(\gamma)^{-i} \neq 1 + a. \end{aligned}$$

Or l'entier p-adique $\kappa(\gamma)^{-1}$ est un générateur topologique de $1+p\mathbb{Z}_p$. Comme a est non nul, il existe $i_0 \in \mathbb{Z}_p$ tel que $\kappa(\gamma)^{-i} = 1 + a$. L'énoncé $C_i(E)$ est ainsi mis en défaut si et seulement si $i = i_0$.

Les notations sont les mêmes que dans la partie précédente : F désigne un corps de nombres et $E = F(\mu_p)$. On pose $\Delta := \mathrm{Gal}(E/F)$ et d l'ordre de Δ. Le théorème précédent nous permet facilement de comparer les quotients des noyaux de localisation (cf. [N4]). Dans ce qui suit, on énonce les résultats pour les noyaux sauvages étales (i.e. pour les entiers $i \geq 1$). Toutefois, ils restent valables pour tout entier $i \in \mathbb{Z}_p$.

Rappelons la notation, pour tout $k \in \mathbb{Z}_p$:

$$\omega_k(F) := |H^0(F, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(k))|,$$

Théorème 2.3.9. *Soient i et j des entiers p-adiques et $t := \omega_{(i-j)}(E)$. On a un isomorphisme canonique*

$$\mathcal{H}^{ét}_{2i}(E)/p^t \simeq \mathcal{H}^{ét}_{2j}(E)/p^t(i-j).$$

Si i et j sont des entiers naturels et si $i \equiv j \bmod d$ alors

$$\mathcal{H}^{ét}_{2i}(F)/p^t \simeq \mathcal{H}^{ét}_{2j}(F)/p^t.$$

Démonstration. Le second isomorphisme résulte simplement du premier en prenant les co-invariants sous l'action de Δ. Démontrons donc le premier isomorphisme.

$$\begin{array}{rcl} X'_\infty(i) & \simeq & X'_\infty(j)(i-j) \\ (X'_\infty(i))_\Gamma & \simeq & (X'_\infty(j)(i-j))_\Gamma \\ (X'_\infty(i))_\Gamma/p^t & \simeq & (X'_\infty(j)(i-j))_\Gamma/p^t \\ & \simeq & [(X'_\infty(j))/p^t(i-j)]_\Gamma \end{array}$$

Enfin, vu le choix de t, Γ opère de manière identique sur $(X'_\infty(j))/p^t$ et $(X'_\infty(j))/p^t(i-j)$. On a donc

$$[(X'_\infty(j))/p^t(i-j)]_\Gamma \simeq [(X'_\infty(j))/p^t]_\Gamma(i-j) \simeq \mathcal{H}^{ét}_{2j}(E)/p^t(i-j).$$

$\square$

Remarque. L'isomorphisme précédent, entre les p^t-quotients du noyau sauvage $WK_2^{ét}(E)$ (pour $i = 1$) et du groupe de classes logarithmiques $\widetilde{\mathcal{C}\ell}(E)$ (pour $i = 0$) peut se construire *explicitement* à l'aide des valuations logarithmiques (cf. [J3]).

On a le corollaire immédiat suivant (cf. [S], 6 satz 4.) :

Corollaire 2.3.10. *Si $\mathcal{H}_{2i}^{ét}(F) = 0$ alors $\mathcal{H}_{2j}^{ét}(F) = 0$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$ tel que $j \equiv i \bmod d$.*

Il en découle immédiatement que si $\mathcal{H}_{2i}^{ét}(F) = 0$ alors $C_j(F)$ est vraie dès que $j \equiv i \bmod d$.

Dans le corollaire suivant, on énonce le théorème "composante par composante" (cf. aussi [JMi, Théorème 4]). Le schéma de corps est le suivant : on fixe un corps de nombres k tel que E_∞/k est abélien et $\mathrm{Gal}(E/k) \simeq \Delta$ est de degré d premier à p (Si $p = 2$, on suppose que k contient μ_4).

Corollaire 2.3.11. *Soient i et j des entiers naturels et $t := \omega_{(i-j)}(E)$. Pour tout caractère p-adique irréductible ϕ de Δ, on a un isomorphismes de $\mathbb{Z}_p(\phi)$-modules :*

$$(e_\phi \mathcal{H}_{2i}^{ét}(E))/p^t \simeq (e_{\phi\omega^{j-i}} \mathcal{H}_{2j}^{ét}(E))/p^t.$$

Remarque.

– Les modules $\mathbb{Z}_p(\phi)$ et $\mathbb{Z}_p(\phi\omega^{j-i})$ coïncident.

– Lorsque $i \equiv j \bmod d$ on retrouve la seconde affirmation du théorème 2.3.9.

Enfin le théorème 2.3.9 nous donne un résultat de périodicité sur les noyaux sauvages étales.

Corollaire 2.3.12. *Soient i et N des entiers naturels tels que p^N annule $\mathcal{H}_{2i}^{ét}(F)$. Pour tout entier positif j tel que $j \equiv i \bmod d$ et $\omega_{(i-j)}(E) \geq N + 1$ (par exemple $j = i + k[F(\mu_{p^N+1}) : F]$ et $k \geq 1$), on a un isomorphisme canonique :*

$$\mathcal{H}_{2i}^{ét}(F) \simeq \mathcal{H}_{2j}^{ét}(F).$$

Ce résultat permet, en particulier, de comparer les noyaux étales entiers lorsque ces derniers sont suffisamment petits.

Lorsque l'on souhaite comparer les quotients des noyaux de localisation $Ш_S^2(E, \mathbb{Z}_p(i+1))$ et

$$Ш_S^2(E, \mathbb{Z}_p(1)) \simeq A_E^S,$$

on peut éviter *"la singularité"* en 0 du théorème 2.3.5 à condition de monter suffisamment haut dans la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique. On retrouve ainsi un résultat de Keune (cf. [Ke] theorem 6.6), qui peut être vu comme une version finie de 2.3.5 :

Proposition 2.3.13. *Pour tout tout $i \in \mathbb{Z}$ et tout $n \gg 0$, tel que $C(i)$ est vrai*

$$\mathcal{H}_{2i}^{ét}(F) \simeq (A'_{E_n}/p^n(i))_{G_n},$$

où $G_n := \mathrm{Gal}(E_n/F)$.

Démonstration. Démontrons le résultat pour le corps E qui contient les racines p-ièmes de l'unité. Le résultat pour F en découle immédiatement.

On a les isomorphismes :

$$\begin{aligned} X'_\infty(i) &\simeq (\varprojlim A'_n)(i) \\ &\simeq (\varprojlim A'_n/p^n)(i) \\ &\simeq \varprojlim (A'_n/p^n(i)) \end{aligned}$$

La finitude de $\mathcal{H}_{2i}^{ét}(E) = (X'_\infty(i))_\Gamma$ nous donne pour tout $n \gg 0$,

$$\begin{aligned} (X'_\infty(i))_\Gamma &\simeq \varprojlim (A'_n/p^n(i))_\Gamma \\ &\simeq (A'_n/p^n(i))_\Gamma \end{aligned}$$

Enfin, Γ_n opère trivialement sur $A'_n/p^n(i)$. Il en résulte donc l'isomorphisme :

$$\mathcal{H}_{2i}^{ét}(E) \simeq (A'_n/p^n(i))_{(\Gamma/\Gamma_n)}$$

$\square$

Remarques.

- La preuve donnée ici ne donne pas explicitement un entier n à partir duquel l'isomorphisme est satisfait. Les méthodes utilisées dans [Ke] nous donnent un tel entier (pour $i = 1$) : il suffit de prendre n tel que p^n annule $K_2^{ét}(\mathcal{O}'_E)$ et E_∞/E_n est totalement ramifiée en p.
- Le résultat se généralise évidemment pour E à tout $i \in \mathbb{Z}_p$, tel que $C_i(E)$ est vrai.

Dans le même esprit que la proposition précédente, nous démontrons le résultat suivant :

Proposition 2.3.14. *Supposons que $\mu(X'_\infty) = 0$. Pour tout $i \in \mathbb{Z}_p$ et pour tout entier $k \geq 1$, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on a l'isomorphisme canonique*

$$(\mathcal{H}_{2i}^{ét}(E_n))/p^k \simeq A'_n/p^k(i).$$

Démonstration. D'après le théorème 2.3.9, il est clair qu'il suffit de démontrer l'isomorphisme pour $i = 0$.

Comme $\mu(X'_\infty) = 0$, le groupe X'_∞/p^k est fini. Ainsi, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on a

$$X'_\infty/p^k \simeq A'_n/p^k$$

Le groupe de Galois Γ_n opère trivialement sur A'_n/p^k et en passant aux co-invariants on obtient l'isomorphisme :

$$(\mathcal{H}_0^{ét}(E_n))/p^k \simeq A'_n/p^k.$$

□

Remarques. Nous donnerons une autre preuve de cette proposition à la fin du troisième chapitre. A cette occasion, nous donnerons quelques conséquences de ce résultat.

Chapitre 3

Capitulation des groupes de K-théorie dans une $\mathbb{Z}_p$-extension

On en vient à l'étude du noyau du morphisme d'extension des K-groupes dans une $\mathbb{Z}_p$-extension. Il s'agit d'obtenir l'analogue d'un théorème de M. Grandet et J.-F. Jaulent sur les groupes de classes (cf. [GJ]) pour les K-groupes pairs.
La première partie de ce chapitre vise à obtenir un résultat général en théorie d'Iwasawa. Dans la seconde partie, nous appliquons ce résultat aux K-groupes pairs. La dernière partie est consacrée au cas particulier de la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique.

3.1 Suites admissibles et co-adjoint

On fixe un nombre premier p. On revient au cadre général de l'étude des Λ-modules. Sauf mention contraire, dans toute cette partie, M désigne un *Λ-module de type fini et de torsion.*

3.1.1 Généralités

Dans cette partie, on procède à des rappels sur la notion de suite admissible et de co-adjoint d'un Λ-module. Etant donné un idéal premier $\mathfrak{p}$ de Λ, on note $M_{\mathfrak{p}}$ le localisé en $\mathfrak{p}$ de M et P_1 l'ensemble des idéaux premiers de hauteur 1 de Λ.

Proposition 3.1.1. *Un Λ-module M de type fini est fini si et seulement si $M_{\mathfrak{p}} = 0$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p} \in P_1$.*
Un Λ-module M de type fini est de torsion si et seulement si $M_{\mathfrak{p}} = 0$ pour presque tout (i.e. sauf un nombre fini) idéal premier $\mathfrak{P} \in P_1$. Plus précisément $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$ si et seulement si $\mathfrak{p}$ et $(car(M))$ sont étrangers.

On désigne par $\mathrm{supp}(M)$ le support de M. C'est l'ensemble des idéaux premiers $\mathfrak{p} \in P_1$ disjoints de l'idéal $(car(M))$.

Ainsi, on a l'application naturelle de localisation :

$$\Psi_M : M \to \prod_{\mathfrak{p} \in P_1} M_{\mathfrak{p}} = \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \mathrm{supp}(M)} M_{\mathfrak{p}}.$$

On introduit les notions d'adjoint et de sous-module fini maximal. Celles-ci nous serons particulièrement utiles, notamment dans l'étude des problèmes de capitulation.

Définition 3.1.2. ***(et Proposition.)***

$\mathrm{coker}\,\Psi_M := \beta(M)$ *est le co-adjoint de M.*

$\ker\Psi_M := M^0$ *est le sous-Λ-module fini maximal de M.*

Enfin on introduit la notion de suite *admissible*. Celle-ci nous permet d'obtenir des représentation plus explicites du co-adjoint et du sous-module fini maximale de M.

Définition 3.1.3. *Une suite $\{\pi_n\}_{n\geq 0}$ d'éléments non nuls de Λ est M-admissible si*

1. *$\pi_0 \in (p, T)$ et pour tout $n \geq 1$ on a $\pi_{n+1} \in \pi_n(p, T)$.*
2. *Les diviseurs π_n et $car(M)$ sont étrangers (i.e. M/π_n est fini).*

Remarque. La suite $\{p^n\}_{n\geq 1}$ est M-admissible si et seulement si l'invariant $\mu(M)$ est nul.

Pour tout $n \geq 0$ on a
$$\frac{1}{\pi_n}\Lambda \subset \frac{1}{\pi_{n+1}}\Lambda,$$
et
$$\varinjlim(\frac{1}{\pi_n}\Lambda) = \bigcup_{n\geq 0} \frac{1}{\pi_n}\Lambda.$$

On a ainsi
$$(\bigcup_{n\geq 0} \frac{1}{\pi_n}\Lambda)/\Lambda \simeq \lim_{\rightarrow} \Lambda/\pi_n,$$
où la limite inductive est prise pour les applications de multiplication :
$$\Lambda/\pi_n \overset{\frac{\pi_{n+1}}{\pi_n}}{\rightarrow} \Lambda/\pi_{n+1}.$$

Considérons maintenant l'application naturelle :
$$\begin{array}{rll} \Phi_M : & M \otimes_\Lambda (\bigcup_{n\geq 0} \frac{1}{\pi_n}\Lambda) & \rightarrow \oplus_{\mathfrak{p}} M_{\mathfrak{p}} \\ & m \otimes \frac{1}{\pi_n} & \rightarrow (\dfrac{m}{\pi_n})_{\mathfrak{p}}, \end{array}$$

où la somme directe est prise sur les premiers $\mathfrak{p} \in P_1$ qui divisent le polynôme caractéristique de M.

Lemme 3.1.4. *Le morphisme Φ_M est un isomorphisme de Λ-module.*

On peut ainsi décrire le co-adjoint de M au moyen d'une suite M-admissible.

Théorème 3.1.5. *Soit M un Λ-module de torsion et de type fini et $\{\pi_n\}_{n\geq 0}$ une suite M-admissible. Alors on a un isomorphisme de Λ-modules*
$$\beta(M) \simeq \varinjlim M/\pi_n M.$$

Démonstration. On a le diagramme commutatif suivant :
$$\begin{tikzcd} \Lambda \otimes M \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & (\bigcup_{n\geq 0} \frac{1}{\pi_n}\Lambda) \otimes M \arrow[r] \arrow[d, "\Phi_M"] & (\bigcup_{n\geq 0} \frac{1}{\pi_n}\Lambda)/\Lambda \otimes M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ M \arrow[r] & \bigoplus_{\mathfrak{p}\in \mathrm{supp}(M)} M_{\mathfrak{p}} \arrow[r] & \beta(M) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

D'après le lemme précédent, l'application Φ_M est un isomorphisme. La flèche verticale de droite du diagramme est donc également un isomorphisme et on a :

$$\begin{aligned}\beta(M) &\simeq (\bigcup_{n\geq 0}\frac{1}{\pi_n}\Lambda)/\Lambda\otimes M\\ &\simeq \varinjlim(\Lambda/\pi_n)\otimes M\\ &\simeq \varinjlim(M/\pi_n).\end{aligned}$$

□

Enfin le sous-module fini maximal M^0 de M se décrit au moyen d'une suite M-admissible de la manière suivante :

Théorème 3.1.6. *Soient M un Λ-module de type fini de torsion et $\{\pi_n\}$ une suite M-admissible. Pour tout $m \geq n \geq 0$,*

$$\ker\left(M/\pi_n \overset{\frac{\pi_m}{\pi_n}}{\to} M/\pi_m\right) \subseteq M^0/\pi_n.$$

De plus, pour tout $n \gg 0$ et tout $m \geq n$ suffisamment grand :

$$M^0 \simeq \ker\left(M/\pi_n \overset{\frac{\pi_m}{\pi_n}}{\to} M/\pi_m\right).$$

Démonstration. Notons que

$$M^0/\pi_n \hookrightarrow M/\pi_n.$$

Démontrons la première assertion. Soit $x \in M$ tel que

$$(\frac{\pi_m}{\pi_n})x = \pi_m y,$$

avec $y \in M$. Alors $\pi_m(x-\pi_n y) = 0$. Ainsi $(x-\pi_n y) \in M^0$ car $\pi_n \notin \mathrm{supp}(M)$.

Pour montrer la seconde assertion, il s'agit d'obtenir l'inclusion dans l'autre sens. Pour tout $n \gg 0$, choisissons $m \geq n$ tel que π_m/π_n annule M^0. On a alors le diagramme

$$\begin{tikzcd} M^0 \arrow[r, hook] \arrow[d, "0"] & M/\pi_n \arrow[d, "\frac{\pi_m}{\pi_n}"] \\ M^0 \arrow[r, hook] & M/\pi_m \end{tikzcd}$$

où la flèche verticale de gauche est triviale. On obtient ainsi

$$M^0 \hookrightarrow \ker\left(M/\pi_n \to M/\pi_m\right).$$

$\square$

Corollaire 3.1.7. *Pour tout $n \gg 0$, la projection $M \to M/\pi_n$ induit un isomorphisme :*

$$M^0 \simeq \ker\left(M/\pi_n \to \beta(M)\right).$$

3.1.2 Application à la capitulation

On fixe un groupe Γ topologiquement isomorphe à $\mathbb{Z}_p$ ainsi qu'un générateur topologique γ de Γ. On note Γ_n l'unique sous-groupe de Γ d'indice p^n. On identifie l'algèbre de groupe $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ à l'algèbre Λ en "posant"

$$T = \gamma - 1$$

comme dans le second chapitre.
Rappelons que pour tout $m \geq n \geq 0$, on pose $\omega_n := \gamma^{p^n} - 1$ et

$$\nu_{m,n} := \frac{\omega_m}{\omega_n} = \sum_{k=0}^{p^h-1} \gamma^{p^n k},$$

où $h = m - n$.

Le but de cette section est de montrer que sous certaines conditions, le sous-module fini maximal M^0 d'un Λ-module M devient un facteur direct du *groupe abélien M_{Γ_n}.*

Etant donné un Λ-module M de type fini, on énonce les trois hypothèse suivantes :
(a) Le module M est de Λ-torsion.
(b) La suite $(\omega_n)_{n\geq 0}$ est admissible.
(c) La suite $(p^n)_{n\geq 0}$ est admissible (i.e. $\mu(M) = 0$).
Nous allons démontrer le résultat suivant :

Théorème 3.1.8. *Soit M un Λ-module de type fini satisfaisant les conditions (a), (b) et (c).*
Alors pour tout $n \gg 0$, la suite exacte de groupes abéliens

$$0 \to M^0 \to M_{\Gamma_n} \to \beta(M)^{\Gamma_n} \to 0, \tag{3.1.1}$$

est une suite exacte scindée.

D'après la section précédente, si M satisfait (a) et (b), alors on a l'égalité pour tout $n \gg 0$,

$$M^0 \simeq \ker(M_{\Gamma_n} \to \beta(M)^{\Gamma_n}).$$

Pour montrer que la suite 3.1.1 est exacte, il reste à voir la surjectivité de

$$\varphi_n : M_{\Gamma_n} \to \beta(M)^{\Gamma_n}.$$

Celle-ci est démontrée dans [LMN, Lemma 1.1] et d'une manière différente dans [N4, Lemme 2.4], toujours sous les hypothèses (a) et (b) pour M.

Posons $\overline{M} := M/M^0$. La démonstration de la surjectivité de $\varphi := \varphi_0$ dans [N4] repose sur le lemme suivant. On propose une démonstration de ce lemme, différente de celle donnée dans [N4], mais qui fait appel à l'hypothèse supplémentaire (c) (qui nous sera de toute façon indispensable dans la suite).

Lemme 3.1.9. *Soit M un Λ-module de type fini satisfaisant les conditions (a) et (c). On suppose de plus que $\omega_0 \notin \mathrm{supp}(M)$ (i.e. M_Γ est fini). On a alors un isomorphisme :*

$$(\overline{M})_\Gamma \simeq \beta(M)^\Gamma.$$

Démonstration. Les conditions (a) et (c) font de M un $\mathbb{Z}_p$-module de type fini dont la $\mathbb{Z}_p$-torsion est égale à M^0. Donc $\overline{M}$ est un $\mathbb{Z}_p$-module libre. On a donc une suite exacte :

$$0 \to \overline{M} \otimes \mathbb{Z}_p \to \overline{M} \otimes \mathbb{Q}_p \to \overline{M} \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \to 0.$$

La suite exacte des invariants-co-invariants par Γ appliquée à la suite exacte précédente nous donne alors :

$$0 \longrightarrow \overline{M}^\Gamma \longrightarrow (\overline{M} \otimes \mathbb{Q}_p)^\Gamma \longrightarrow (\overline{M} \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^\Gamma \longrightarrow$$

$$(\overline{M})_\Gamma \longrightarrow (\overline{M} \otimes \mathbb{Q}_p)_\Gamma \longrightarrow (\overline{M} \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)_\Gamma \longrightarrow 0$$

Le Λ-module de torsion $\overline{M}$ à le même polynôme caractéristique que M et n'a pas de sous module fini maximal. L'hypothèse $\omega_0 \notin \mathrm{supp}(M)$ implique que $\overline{M}^\Gamma$ est fini, donc nul. Le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel $(\overline{M} \otimes \mathbb{Q}_p)^\Gamma$ s'identifie alors à un sous-groupe du module de $\mathbb{Z}_p$-torsion $(\overline{M} \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^\Gamma$. Ainsi $(\overline{M} \otimes \mathbb{Q}_p)^\Gamma = 0$.

D'autre part, comme $(\overline{M}\otimes\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^\Gamma$ est fini, le module $(\overline{M}\otimes\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)_\Gamma$ est nul. Ainsi $(\overline{M}\otimes\mathbb{Q}_p)_\Gamma$ est fini en tant que quotient de $(\overline{M})_\Gamma$. Comme $(\overline{M}\otimes\mathbb{Q}_p)_\Gamma$ est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel, il est également nul.

Il reste donc
$$(\overline{M}\otimes\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^\Gamma \simeq (\overline{M})_\Gamma.$$

On conclut en remarquant qu'on a les isomorphismes canoniques (d'après (c)) :
$$\begin{aligned}\overline{M}\otimes\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p &\simeq \varinjlim(\overline{M}/p^n) && (3.1.2)\\ &\simeq \varinjlim M/p^n && (3.1.3)\\ &\simeq \beta(M) && (3.1.4)\end{aligned}$$

□

On peut alors montrer la proposition suivante :

Proposition 3.1.10. *Si M satisfait les conditions (a), (b) et (c) alors pour tout $n \gg 0$, l'application $\varphi_n : M_{\Gamma_n} \to \beta(M)^{\Gamma_n}$ est surjective.*

Démonstration. La suite exacte
$$0 \to M^0 \to M \to \overline{M} \to 0$$
donne pour tout $n \geq 0$, par co-desente, la suite exacte
$$0 \to M^0_{\Gamma_n} \to M_{\Gamma_n} \to \overline{M}_{\Gamma_n} \to 0,$$
car $\overline{M}^{\Gamma_n} = 0$ (en effet, d'après (b), les diviseurs ω_n et $car(\bar{M})$ sont disjoints).

En choisissant n suffisamment grand pour que Γ_n opère trivialement sur le module fini M^0, on a la suite exacte
$$0 \to M^0 \to M_{\Gamma_n} \to \overline{M}_{\Gamma_n} \to 0.$$

On a par ailleurs la suite exacte
$$0 \to M^0 \to M_{\Gamma_n} \xrightarrow{\varphi_n} \beta(M)^{\Gamma_n}.$$

La surjectivité de φ_n découle ainsi de l'égalité des ordres $|\beta(M)^{\Gamma_n}| = |\overline{M}_{\Gamma_n}|$, obtenue dans le lemme précédent. □

Maintenant que l'on a vu l'exactitude de la suite 3.1.1, il s'agit de montrer qu'elle est scindée. Pour cela, nous aurons besoin de la proposition suivante sur les p-groupes abéliens.

Proposition 3.1.11. *Soit B un p-groupe abélien et A un sous-groupe. On suppose que p^e annule A. Si pour tout entier n tel que $0 \leq n \leq e$ l'inclusion de A dans B induit une injection $A/p^n \hookrightarrow B/p^n$, alors A est un facteur direct dans B.*

Démonstration. Remarquons, dans un premier temps, que l'hypothèse $0 \leq n \leq e$ n'est pas restrictive. En effet, il découle facilement de

$$A = A/p^e \hookrightarrow B/p^e,$$

l'injection pour tout entier $n \geq e$,

$$A = A/p^n \hookrightarrow B/p^n.$$

Le lemme du serpent appliqué à la multiplication par p^n sur la suite exacte

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

conduit à la suite exacte

$$_{p^n}B \to _{p^n}C \to A/p^n \to B/p^n.$$

L'injection $A/p^n \hookrightarrow B/p^n$ pour tout $n \geq 0$ signifie que tout élément de C se relève en un élément de même ordre dans B. Ceci revient à dire que C est un facteur direct dans B. En effet, considérons la décomposition en somme directe de groupes cycliques $C = \bigoplus_i \langle c_i \rangle$; chaque c_i se relève en un élément de même odre b_i de B. Le sous-groupe engendré par les b_i est alors isomorphe à C et l'on a une section pour la surjection $B \to C$, qui est un morphisme. $\square$

Remarque. La réciproque à cette proposition est évidemment vraie.

On a le corollaire suivant :

Corollaire 3.1.12. *Soient $A \subseteq B \subseteq C$ des p-groupes abéliens. Si A est un facteur direct dans C, alors A est un facteur direct dans B.*

Soient $m \geq n \geq 0$ des entiers. Dans ce qui suit nous donnons deux propositions qui concernent l'image de l'application $\varphi_{m,n}$:

$$\begin{array}{ccc} M_{\Gamma_n} & \stackrel{\varphi_{m,n}}{\to} & M_{\Gamma_m} \\ m \bmod \omega_n & \mapsto & m \bmod \omega_m \end{array}$$

Proposition 3.1.13. *On suppose que M satisfait les conditions (a) et (b). Alors pour tout n suffisamment grand et tout $m \geq n$ on a*

$$\varphi_{m,n}(M^0) = p^{m-n}(M^0).$$

Démonstration. Choisissons un entier $n \geq 0$ tel que Γ_n opère trivialement sur M_0. Soient $m \geq n$ et $h = m - n$. Le groupe M^0 s'identifie à un sous-groupe de M_{Γ_m}. De plus, pour tout $x \in M^0$, on a l'égalité

$$\begin{aligned} \nu_{m,n} x &= \sum_{k=0}^{p^h-1} \gamma^{p^n k} x \\ &= p^h x. \end{aligned}$$

Donc l'application $\varphi_{m,n}$ restreinte à M^0 s'identifie à la multiplication par p^h. □

La proposition suivante décrit l'image de l'application d'extension $\varphi_{m,n}$. C'est dans cette proposition qu'apparaît la condition (c) (i.e. $\mu = 0$) requise pour le module M dans les hypothèses du théorème 3.1.8.

Proposition 3.1.14. *On suppose que M satisfait les conditions (a), (b) et (c). Alors pour tout n suffisamment grand et tout $m \geq n$, on a l'égalité :*

$$\varphi_{m,n}(M_{\Gamma_n}) = p^{m-n}(M_{\Gamma_m}).$$

Démonstration. Comme $\mu(M) = 0$, on peut supposer que le polynôme caractéristique $f(T) := car(M)$ est un polynôme distingué. Il existe un entier $r \geq 0$, tel que le polynôme distingué $g(T) := \omega_r(T) f(T)$ annule M. On utilise maintenant un calcul classique dans l'algèbre Λ. Pour tout $n \gg 0$, on a

$$(1+T)^{p^{n-1}} \equiv 1 \bmod (g(T), p).$$

En élevant à la puissance p, on obtient

$$(1+T)^{p^n} \equiv 1 \bmod (g(T), p^2).$$

d'où

$$\begin{aligned} \nu_{n+1,n} &= \sum_{i=0}^{p-1}(1+T)^{ip^n} \\ &\equiv p + p^2 h(T) \bmod g(T) \\ &\equiv p(1+ph(T)) \bmod g(T) \end{aligned}$$

où $h(T) \in \Lambda$.

Par récurrence, on obtient pour tout $m \geq n$ l'existence d'un inversible $u_m(T) \in \Lambda^\times$ tel que $\nu_{m,n} \equiv p^{m-n} u_m(T) \bmod g(T)$. On a ainsi l'égalité $\nu_{m,n}M = p^{m-n}M$, dont on déduit facilement l'égalité :

$$\varphi_{m,n}(M_{\Gamma_n}) = p^{m-n}(M_{\Gamma_m}).$$

$\square$

Considérons un Λ-module M qui satisfait les conditions (a), (b) et (c) du théorème 3.1.8. Nous pouvons maintenant montrer que lorsque l'entier n est suffisamment grand, la suite exacte 3.1.1)

$$0 \to M^0 \to M_{\Gamma_n} \to \beta(M)^{\Gamma_n} \to 0,$$

est une suite exacte *scindée* de groupes abéliens.

Choisissons un entier r suffisamment grand. Pour tout $h \geq 0$, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M^0 \arrow[r] & M_{\Gamma_{r+h}} \arrow[r] & \beta(M)^{\Gamma_{r+h}} \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M^0 \arrow[r] \arrow[u] & M_{\Gamma_r} \arrow[r] \arrow[u, "\nu_{r+h,r}"] & \beta(M)^{\Gamma_r} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \end{tikzcd}$$

L'application $\beta(M)^{\Gamma_r} \to \beta(M)^{\Gamma_{r+h}}$ est injective. La suite exacte longue du serpent associée au diagramme commutatif précédent nous donne ainsi une injection :

$$\operatorname{coker}(M^0 \to M^0) \hookrightarrow \operatorname{coker}(M_{\Gamma_r} \to M_{\Gamma_{r+h}}).$$

D'après la proposition 3.1.13 on a l'égalité pour le premier conoyau :

$$\operatorname{coker}(M^0 \to M^0) = M^0/p^h,$$

et d'après la proposition 3.1.14 on a l'égalité pour le second conoyau :

$$\operatorname{coker}(M_{\Gamma_r} \to M_{\Gamma_{r+h}}) \to (M_{\Gamma_{r+h}})/p^h.$$

Soit $e \geq 1$ un entier tel que p^e annule M^0 et $n \geq r+e$. Pour tout h, avec $0 \leq h \leq e$, en choisissant $r := n-h$ on a donc

$$M^0/p^h \hookrightarrow (M_{\Gamma_n})/p^h.$$

Il résulte alors de la proposition 3.1.11 que M^0 est un facteur direct en tant que groupe abélien de M_{Γ_n} lorsque l'entier n est suffisamment grand.

Le théorème 3.1.8 est ainsi démontré.

Notons enfin qu'il est possible d'avoir la structure de p-groupe abélien de $\overline{M}_{\Gamma_n}$ lorsque n est suffisamment grand. On retrouve alors exactement (mais par des moyens différents) le théorème de [GJ].

Proposition 3.1.15. *Posons $\lambda = \lambda(M)$. Sous les hypothèses du théorème 3.1.8, il existe $(\alpha_1, \cdots, \alpha_\lambda) \in \mathbb{Z}^\lambda$ tel que pour tout $n \gg 0$, la décomposition élémentaire du p-groupe abélien $\overline{M}_{\Gamma_n}$ est donnée par*

$$\bigoplus_{i=1}^{\lambda} \mathbb{Z}/p^{\alpha_i+n}.$$

Démonstration. Pour tout $n \gg 0$, le p-rang de $\overline{M}_{\Gamma_n}$ est égal à λ. On obtient ainsi la décomposition :

$$\overline{M}_{\Gamma_n} \simeq \bigoplus_{i=1}^{\lambda} \mathbb{Z}/p^{(\alpha_{n,i}+n)},$$

avec $\alpha_{n,i} > -n+1$.

Par ailleurs, d'après la proposition 3.1.14 le groupe $\overline{M}_{\Gamma_n}$ est isomorphe au sous-groupe :

$$\begin{aligned} p\overline{M}_{\Gamma_{n+1}} &\simeq p\left(\bigoplus_{i=1}^{\lambda} \mathbb{Z}/p^{(\alpha_{n+1,i}+n+1)}\right) \\ &\simeq \bigoplus_{i=1}^{\lambda} \mathbb{Z}/p^{(\alpha_{n+1,i}+n)} \end{aligned}$$

Les égalités $\alpha_i^{(n+1)} = \alpha_i^{(n)}$ résultent de l'unicité de la décomposition en produit de p-groupes cycliques. $\square$

3.2 Capitulation pour les K-groupes pairs

Dans cette partie, on suppose que p est un nombre premier et F_∞/F une $\mathbb{Z}_p$-extension quelconque d'un corps de nombres F. Lorsque $p = 2$, on suppose aussi que F contient $\sqrt{-1}$. On en vient à l'étude des noyaux de capitulation des invariants de K-théorie attachés aux étages F_n de la $\mathbb{Z}_p$-extension F_∞/F. Comme toujours on pose $\Gamma = \mathrm{Gal}(F_\infty/F)$ et $\Gamma_n = \Gamma^{p^n} = Gal(F_\infty/F_n)$.

Rappelons brièvement les résultats pour les S-groupes de classes A_n^S, où S est un ensemble fini de places non complexes de F. Posons $A_\infty^S := \varinjlim A_n^S$, où la limite inductive est prise sur les morphismes naturels d'extention des idéaux. Il est connu que les noyaux de capitulation

$$\mathrm{Cap}^S(F_n) := \ker(A_n^S \to A_\infty^S)$$

se stabilisent lorsque n devient suffisamment grand (cf. [Iw2]).
Plus précisément, pour tous $m \geq n \gg 0$, la norme $N_{m,n} : \mathrm{Cap}^S(F_m) \to \mathrm{Cap}^S(F_n)$ est un isomorphisme. Le groupe $\mathrm{Cap}^S(F_n)$ s'identifie de plus au sous-module fini maximal $(X_\infty^S)^0$. D'après un résultat de M. Grandet et J.-F. Jaulent (cf. [GJ]) on peut dire mieux. Lorsque $\mu(X_\infty^S) = 0$, il existe $(\alpha_1, \cdots, \alpha_\lambda) \in \mathbb{Z}^\lambda$ tel qu'on a, pour tout n suffisamment grand, un isomorphisme de p-groupes abéliens :

$$A_n^S \simeq \mathrm{Cap}^S(F_n) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{\lambda} \mathbb{Z}/p^{n+\alpha_i}\right),$$

avec $\lambda := \lambda(X_\infty^S)$.

Considérons maintenant l'analogue des noyaux $\mathrm{Cap}(F_n)$ en K-théorie supérieur. Ces groupes ont déja été étudiés par de nombreux auteurs. On se place du point de vue des K-groupes étales. Posons

$$K_{2i+1}^{ét}(F_\infty) := \varinjlim K_{2i+1}^{ét}(F_n)$$

et pour tout ensemble fini S de places de F contenant $S_p \cup S_\infty$,

$$K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_{F_\infty}^S) := \varinjlim K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_{F_n}^S).$$

On définit pour tout $i \geq 1$, les *noyaux de capitulation supérieurs*

$$\mathrm{Cap}_i(F_n) := \ker\left(K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_{F_n}^S) \to K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_{F_\infty}^S)\right).$$

Remarque. Ces noyaux ne dépendent pas de l'ensemble S contenant $S_p \cup S_\infty$.

On a alors le théorème suivant :

Théorème 3.2.1. *Pour tout $i \geq 1$ et tout $n \geq 0$, on a un isomorphisme*

$$\mathrm{Cap}_i(F_n) \simeq H^1(\Gamma_n, K_{2i+1}^{ét}(F_\infty)).$$

Enfin pour tout $n \gg 0$ et tout $m \geq n \gg 0$, la norme induit un isomorphisme :

$$\mathrm{Cap}_i(F_m) \simeq \mathrm{Cap}_i(F_n).$$

Ce résultat a été démontré par B. Kahn pour $i = 1$ (cf [Ka]) et généralisé par M. Kolster et A. Movahhedi à tout entier $i \geq 1$ (cf. [KM]). Dans tous les cas il découle d'un résultat général dû à T. Nguyen Quang Do.

En particulier, on a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Cap}_i(F_n) \to K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_{F_n}^S) \to K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_{F_\infty}^S)^{\Gamma_n} \to 0.$$

Pour généraliser le résultat de M. Grandet et J.-F. Jaulent aux groupes de capitulation supérieurs, il s'agit donc de montrer que cette suite exacte de groupes abéliens est scindée. Nous utilisons les résultats de la section précédente.

Fixons un ensemble de places S contenant S_p et un corps de nombres F. La $\mathbb{Z}_p$-extension F_∞/F étant également fixée, on peut considérer le Λ-module

$$M_i := \varprojlim K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_{F_n}^S),$$

où la limite projective est prise pour les normes.

On a la co-descente pour les modules M_i.

Proposition 3.2.2. *Pour tout $n \geq 0$,*

$$(M_i)_{\Gamma_n} \simeq K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_{F_n}^S).$$

Démonstration. Cela résulte du fait que pour tout $n \geq 0$ et tout $m \geq n$ on a la codescente pour les K-groupes pairs :

$$(K_{2i}(\mathcal{O}_{F_m}^S))_{G_{m,n}} \simeq K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_{F_n}^S).$$

□

Il s'agit maintenant de voir si le Λ-module M_i satisfait les hypothèses (a), (b) et (c) du théorème 3.1.8. Examinons ces trois propriétés.

(a) Il est clair que M_i est un Λ-module de type fini. De plus il est de torsion car le $\mathbb{Z}_p$-rang de $(M_i)_\Gamma$ est nul.
(b) De même, pour tout $n \geq 0$, le groupe $(M_i)_{\Gamma_n}$ est fini. Donc la suite $(\omega_n)_{n\geq 0}$ est M_i-admissible.
(c) L'invariant μ de M_i n'est pas connu pour être nul en général. Cependant, lorsque F_∞/F est la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique alors $\mu(M_i) = \mu(X'_\infty)$. Rappelons qu'il est conjecturé que $\mu(X'_\infty) = 0$. D'après un résultat de Ferrero et Washington, c'est vrai lorsque $F/\mathbb{Q}$ est abélien. Nous reviendrons sur le cas cyclotomique dans la prochaine section.

Comme conséquence immédiate du théorème 3.1.8, on a la proposition suivante :

Proposition 3.2.3. *Si $\mu(M_i) = 0$, alors pour tout n suffisamment grand, la suite exacte de groupes abéliens*

$$0 \to \mathrm{Cap}_i(F_n) \to K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_{F_n}^S) \to K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_{F_\infty}^S)^{\Gamma_n} \to 0,$$

est scindée.

Comme on a pu le voir, les K-groupes pairs se comportent bien vis à vis de la co-descente dans une $\mathbb{Z}_p$-extension. Evidemment, on ne peut pas en espérer autant pour la descente galoisienne en toute généralité (i.e. dès lors que les noyaux de capitulation sont nuls). Toutefois, comme le montre la proposition suivante, celle-ci à lieu de manière *non canonique.*

Proposition 3.2.4. *Si $\mu(M_i) = 0$, alors pour tout n suffisamment grand et tout $m \geq n$, les groupes $K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_{F_n}^S)$ et $K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_{F_m}^S)^{G_{m,n}}$ sont isomorphes en tant que groupes abéliens.*

Démonstration. Choisissons n suffisamment grand et $m \geq n$. Le groupe $G_{m,n}$ opère trivialement sur le noyau de capitulation $\mathrm{Cap}_i(F_m)$. On a donc la descente galoisienne pour ce noyau :

$$\mathrm{Cap}_i(F_m)^{G_{m,n}} \simeq \mathrm{Cap}_i(F_n)$$

Considérons la suite exacte de $G_{m,n}$-modules :

$$0 \to \mathrm{Cap}_i(F_m) \to K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_{F_m}^S) \to K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_{F_\infty}^S)^{\Gamma_m} \to 0.$$

On déduit de la suite exacte précédente, la suite exacte courte :

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Cap}_i(F_m) \to K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_{F_m}^S)^{G_{m,n}} \to K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_{F_\infty}^S)^{\Gamma_n} \to \\ \to \mathrm{Cap}_i(F_m)_{G_{m,n}} \to K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_{F_m}^S)_{G_{m,n}} \to \dots \end{aligned}$$

De plus on a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Cap}_i(F_m)_{G_{m,n}} \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_{F_m}^S)_{G_{m,n}} \arrow[d, "\simeq"] \\ \mathrm{Cap}_i(F_n) \arrow[r, hook] & K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_{F_n}^S) \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont induites par la norme.
Donc l'application $\mathrm{Cap}_i(F_m)_{G_{m,n}} \to K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_{F_m}^S)_{G_{m,n}}$ est injective et on déduit la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Cap}_i(F_m) \to K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_{F_m}^S)^{G_{m,n}} \to K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_{F_\infty}^S)^{\Gamma_n} \to 0. \tag{3.2.1}$$

D'autre part $\mathrm{Cap}_i(F_m)$ est un facteur direct de $K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_{F_m}^S)$. Donc d'après le corollaire 3.1.12, c'est un facteur direct dans le sous-groupe $K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_{F_m}^S)^{G_{m,n}}$. Ainsi la suite (3.2.1) est une suite exacte scindée de groupes abéliens.

On obtient pour finir les isomorphismes de groupes abéliens :

$$\begin{aligned} K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_{F_m}^S)^{G_{m,n}} &\simeq \mathrm{Cap}_i(F_m) \oplus K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_{F_\infty}^S)^{\Gamma_n} \\ &\simeq \mathrm{Cap}_i(F_n) \oplus K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_{F_\infty}^S)^{\Gamma_n} \\ &\simeq K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_{F_n}^S). \end{aligned}$$

$\square$

Remarque. Etant donnés un p-groupe cyclique G et un $\mathbb{Z}_p[G]$-module A fini, les groupes A^G et A_G ont le même ordre mais n'ont pas *en général* la même structure de groupe abélien (dans le cas contraire, la proposition précédente serait "triviale"). Donnons un exemple :
posons $A = \mathbb{Z}/p \oplus \mathbb{Z}/p^n$ avec $n \geq 2$ et définissons l'automorphisme σ de A par

$$(x, y) \xrightarrow{\sigma} (x + (y \bmod p), y).$$

Considérons alors le groupe $G = \langle \sigma \rangle$ engendré par σ. Le groupe G est cyclique d'ordre p et on a une structure de $\mathbb{Z}_p[G]$-module pour A. On vérifie alors facilement les isomorphismes :

$$A^G \simeq \mathbb{Z}/p \oplus \mathbb{Z}/p^{n-1} \text{ et } A_G \simeq \mathbb{Z}/p^n.$$

Nous pouvons désormais écrire l'analogue du théorème de M. Grandet et J.-F. Jaulent (cf. [GJ]) pour tous les groupes pairs de la K-théorie *algébrique* des anneaux d'entiers. Nous supposons, pour cela, que la conjecture de Quillen-Lichtenbaum est vraie (cf. chapitre 1) : on a ainsi l'isomorphisme canonique entre K-groupes de Quillen ("tenseur $\mathbb{Z}_p$") et K-groupes étales (cf. [We] Theorem 70). Précisément, pour tout nombre premier p, pour tout corps de nombres F (contenant $\sqrt{-1}$ si $p = 2$), pour tout entier $i \geq 2$ et pour tout ensemble fini T de places de F les caractères de Chern induisent des isomorphismes :

$$K_{2i}(\mathcal{O}_F^T) \otimes \mathbb{Z}_p \simeq K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_F^S),$$

avec $S := T \cup S_p$.

Théorème 3.2.5. *Soient p un nombre premier, $F_\infty = \bigcup_{n\geq 0} F_n$ une $\mathbb{Z}_p$-extension d'un corps de nombres F (contenant $\sqrt{-1}$ si $p = 2$), T un ensemble fini de places non complexes de F et i un entier positif ou nul. Lorsque l'invariant μ du Λ-module noethérien de torsion $\varprojlim(K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_{F_n}^T[1/p]))$ est nul, les assertions suivantes sont vérifiées pour tout n suffisamment grand :*

(i) Le sous-groupe de capitulation $\mathrm{Cap}_i(F_n)$ *est un facteur direct du groupe abélien* $K_{2i}(\mathcal{O}_{F_n}^T)\{p\}$.

(ii) Il existe une famille $(\alpha_1^{(i)}, \cdots, \alpha_\lambda^{(i)})$ *d'entiers relatifs, et une famille* $(\alpha_{\lambda+1}^{(i)}, \cdots, \alpha_{\lambda+t}^{(i)})$ *d'entiers naturels, telles que la décomposition élémentaire du groupe abélien* $K_{2i}(\mathcal{O}_{F_n}^T)\{p\}$ *s'écrive :*

$$K_{2i}(\mathcal{O}_{F_n}^T)\{p\} \simeq \left(\bigoplus_{k=1}^{\lambda} \mathbb{Z}/p^{n+\alpha_k^{(i)}}\right) \oplus \left(\bigoplus_{k=\lambda+1}^{\lambda+t} \mathbb{Z}/p^{\alpha_k^{(i)}}\right).$$

(iii) Lorsque $i \geq 1$ *et pour tout* $m \geq n$, *les groupes* $K_{2i}(\mathcal{O}_{F_m}^T)^{G_{m,n}}$ *et* $K_{2i}(\mathcal{O}_{F_n}^T)$, *avec* $G_{m,n} := \mathrm{Gal}(F_m/F_n)$, *ont la même stucture de groupe abélien.*

Le résultat précédent se généralise bien sûr, pour tout $i \in \mathbb{Z}$ non nul, aux groupes $H^2(G_{F_n}^S, \mathbb{Z}_p(i+1))$ dès lors que ceux-ci sont finis (i.e. $C_i(F_n)$ est vraie).

Enfin nous retrouvons, entre autre, le résultat de périodicité pour les noyaux de capitulation donné dans [KM, Corollary 3.7.]. Nous reviendrons en détail sur le cas *cyclotomique* dans la partie suivante.

Corollaire 3.2.6. *Sous les hypothèses et avec les notations du théorème précédent, lorsque* F_∞/F *est la* $\mathbb{Z}_p$*-extension cyclotomique et pour tout* $i, j \geq 1$, $i \equiv j \bmod d$ *on a pour tout* $n \gg 0$ *:*

- *L'isomorphisme :* $\mathrm{Cap}_i(F_n) \simeq \mathrm{Cap}_j(F_n)$.
- *L'égalité pour tout* $1 \leq k \leq \lambda$ *tel que* $\alpha_k^i < 0$ *:*

$$\alpha_k^{(i)} = \alpha_k^{(j)}.$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de l'isomorphisme

$$K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_{F_n}^S)/p^n \simeq K_{2j}^{ét}(\mathcal{O}_{F_n}^S)/p^n,$$

pour tout $i, j \geq 1$, $i \equiv j \bmod d$. □

3.3 Le cas cyclotomique

Dans cette section, on s'intéresse au cas où F_∞ est la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique du corps F. Le schéma de corps est le même que dans le deuxième chapitre : on pose $E = F(\mu_p)$, ainsi que $E_\infty = E(\mu_{p^\infty})$ la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de E. On note $G_\infty := \mathrm{Gal}(E_\infty/F)$ et $\Delta := \mathrm{Gal}(E/F)$. Si $p = 2$, on suppose que $E = F$ contient $\sqrt{-1}$ de sorte que Δ est trivial dans ce cas. On pose

$$\Gamma := \mathrm{Gal}(E_\infty/E) \simeq \mathrm{Gal}(F_\infty/F)$$

et

$$X'_\infty = \mathrm{Gal}(L'_\infty/E_\infty).$$

Rappelons qu'on a la description :

$$\varprojlim \mathcal{H}^{ét}_{2i}(E_n) \simeq X'_\infty(i).$$

La propostion suivante nous sera utile dans le chapitre suivant :

Proposition 3.3.1. *Si $\mu(X'_\infty) = 0$ et si $C_i(E_n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$, on a un isomorphisme canonique :*

$$\mathcal{H}^{ét}_{2i}(E_\infty) \simeq X'_\infty \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i).$$

Démonstration. Les hypothèses de la proposition impliquent que les suites ω_n et p^n sont $X'_\infty(i)$-admissibles. On a donc d'une part :

$$\begin{aligned} \beta(X'_\infty(i)) &\simeq \varinjlim (X'_\infty(i))_{\Gamma_n} \\ &:= \mathcal{H}^{ét}_{2i}(E_\infty). \end{aligned}$$

Et d'autre part :

$$\begin{aligned} \beta(X'_\infty(i)) &\simeq \varinjlim (X'_\infty(i))/p^n \\ &= X'_\infty \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i). \end{aligned}$$

□

3.3.1 Sur la torsion des noyaux sauvages

Comme on a pu le voir dans le second chapitre, il n'est pas difficile d'obtenir des isomorphismes canoniques entre les p-quotients des noyaux sauvages, dès lors que le corps E contient suffisamment de racines de l'unité. Dans [N4], l'auteur montre qu'il est également possible de comparer *canoniquement* la p-torsion des noyaux sauvages. On a cependant besoin d'hypothèses restrictives sur le Λ-module X'_∞ (cf. [N4], Corollaire 2.7).

Proposition 3.3.2. *Supposons que $(X'_\infty)^0 = 0$. Soient i et j des entiers p-adiques tels que les énoncés $C_i(E)$ et $C_j(E)$ sont vrais et $t := \omega_{(i-j)}(E)$. On a un isomorphisme canonique*

$$_{p^t}\mathcal{H}^{\acute{e}t}_{2i}(E) \simeq \left(_{p^t}\mathcal{H}^{\acute{e}t}_{2j}(E)\right)(i-j).$$

T. Nguyen Quang Do propose également une construction explicite pour cet isomorphsime (écrit ici pour $t = 1$) :

$$\begin{array}{ccc} _p(X'_\infty(i))_\Gamma & \longrightarrow & _p(X'_\infty(j))_\Gamma \\ x \bmod \omega^{(i)} & \longmapsto & x + \dfrac{\omega^{(j)} - \omega^{(i)}}{p} y \end{array}$$

où y est l'unique élément de X'_∞ tel que $px = \omega^{(i)} y$. Avec les notations $\omega := \gamma - 1$ et $\omega^{(i)} = \rho(\gamma)^i\gamma - 1$.

La proposition précédente admet une "réciproque".

Proposition 3.3.3. *Soit $i \in \mathbb{Z}_p$ tel que $C_i(E)$ est vrai. S'il existe un isomorphisme*

$$_p\mathcal{H}^{\acute{e}t}_{2i}(E) \simeq \left(_p\mathcal{H}^{\acute{e}t}_{2j}(E)\right)(i-j),$$

alors $C_j(E)$ est vraie.

Démonstration. Posons $\mathcal{H}^{\acute{e}t}_{2j}(E) \simeq \mathbb{Z}_p^{\delta_j} \oplus (\mathcal{H}^{\acute{e}t}_{2j}(E))_{tors}$, où $\delta_j \geq 0$ représente le défaut pour l'énoncé $C_j(E)$.

D'une part

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}_p(\mathcal{H}^{\acute{e}t}_{2j}(E)) &= \delta_j + \mathrm{rg}_p(\mathcal{H}^{\acute{e}t}_{2j}(E)_{tors}) \\ &= \mathrm{rg}_p(\mathcal{H}^{\acute{e}t}_{2i}(E)), \end{aligned}$$

et d'autre part, comme $C_i(E)$ est vraie, $\mathcal{H}^{\acute{e}t}_{2i}(E)$ est fini et

$$\mathrm{rg}_p(\mathcal{H}^{\acute{e}t}_{2i}(E)) = \mathrm{rg}_p(_p\mathcal{H}^{\acute{e}t}_{2i}(E)).$$

Si l'isomorphisme de l'énoncé est vrai, alors

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}_p(_p\mathcal{H}^{\acute{e}t}_{2i}(E)) &= \mathrm{rg}_p(\mathcal{H}^{\acute{e}t}_{2j}(E)_{tors}) \\ &= \mathrm{rg}_p(_p\mathcal{H}^{\acute{e}t}_{2j}(E)), \end{aligned}$$

d'où $\delta_i = 0$. □

Signalons enfin qu'il est possible de comparer la p-torsion des noyaux sauvages étales indépendamment de l'hypothèse $(X'_\infty)^0 = 0$. Dans [Ko1] l'auteur montre le théorème suivant (cf [Ko1, Corollary 2.6] et aussi [J3, Théorème 13]) :

Théorème 3.3.4. *Il existe un entier n_1, tel que pour tout $n > n_1$ et tout k, $1 \leq k \leq n - n_1$ on a une suite exacte*

$$0 \to \left(\mathbb{Z}/p^k\right)^{\delta_n} \to_{p^k} WK_2^{ét}(E_n) \to_{p^k} \mathcal{H}_0^{ét}(E_n)(1) \to 0,$$

où δ_n désigne le défaut de Gross pour le corps E_n.

Le résultat précédent peut se généraliser à tous les noyaux sauvages étales (cf. [KM], Theorem 2.15.).

3.3.2 Sur la capitulation des noyaux sauvages

Fixons un entier relatif i. Le théorème 3.1.8 appliqué au $\Lambda[\Delta]$-module $X'_\infty(i)$ nous donne immédiatement la proposition

Proposition 3.3.5. *Soit i un entier relatif. On suppose que $\mu(X'_\infty) = 0$ et que pour tout $n \gg 0$ l'énoncé $C_i(E_n)$ est vraie. Pour tout $n \gg 0$, la suite exacte de groupes abéliens*

$$0 \to (e_{\omega^{-i}} X'_\infty)^0 \to \mathcal{H}_{2i}^{ét}(F_n) \to \mathcal{H}_{2i}^{ét}(F_\infty)^{\Gamma_n} \to 0$$

est scindée

Démonstration. Il s'agit simplement de considérer la 1-composante de la suite exacte scindée :

$$0 \to (X'_\infty(i))^0 \to \mathcal{H}_{2i}^{ét}(E_n) \to \mathcal{H}_{2i}^{ét}(E_\infty)^{\Gamma_n} \to 0.$$

□

Posons $\lambda := \lambda(X'_\infty)$. Il existe une famille $(\alpha_1^{(i)}, \cdots, \alpha_\lambda^{(i)})$ d'entiers relatifs telle que pour tout $n \gg 0$:

$$\mathcal{H}_{2i}^{ét}(E_n) \simeq (X'_\infty)^0 \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^{\lambda} \mathbb{Z}/p^{(n+\alpha_k^{(i)})} \right).$$

Considérons un ensemble fini S de places de E contenant $S_p \cup S_\infty$. On a alors $X_\infty^S = X'_\infty$, indépendament de S. D'où $\lambda(X_\infty^S) = \lambda$. Le résultat de [GJ] pour les S-groupes de classes nous donne l'existence d'une famille $(\alpha'_1, \cdots, \alpha'_\lambda)$ d'entiers relatifs telle que

$$A_n^S \simeq (X'_\infty)^0 \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^{\lambda} \mathbb{Z}/p^{(n+\alpha'_k)} \right).$$

Pour tout entier n suffisament grand et tout entier h, $1 \leq h \leq n + \min(\alpha'_k, \alpha_k^{(i)})$ on a donc l'égalité des ordres

$$|\mathcal{H}_{2i}^{ét}(E_n)/p^h| = |(A_n^S)/p^h|.$$

D'autre part, on sait que pour tout entier $n \geq 0$, on a une surjection canonique (cf. Proposition 1.3.8) :

$$\mathcal{H}_{2i}^{ét}(E_n)/p^n \to A_n^S/p^n(i) \to 0.$$

A partir de l'égalité des ordres, on retrouve donc la proposition 2.3.14.

Proposition 3.3.6. *Supposons que $\mu(X'_\infty) = 0$. Soit S un ensemble fini de places de E contenant $S_p \cup S_\infty$.*
Pour tout $h \geq 1$, il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$ et tout $i \in \mathbb{Z}$, on a un isomorphisme canonique

$$\mathcal{H}_{2i}^{ét}(E_n)/p^h \simeq A_n^S/p^h(i).$$

En particulier, on a

$$\mathcal{H}_{2i}^{ét}(F_n)/p^h \simeq (e_{\omega^{-i}} A_n^S)/p^h.$$

Donnons quelques conséquences de la proposition 3.3.6. La suivante est immédiate.

Proposition 3.3.7. *Si $\mu(X'_\infty) = 0$ alors pour tout $n \gg 0$,*

$$\mathrm{rg}_p(\mathcal{H}_{2i}^{ét}(E_n)) = \mathrm{rg}_p(A_n^S).$$

Les p-rang des noyaux sauvages étale et du p-groupe des p-classes sont donc *asymptotiquement* égaux. Nous précisons ainsi la formule pour le p-rang des groupes de classes, si E vérifie la conjecture de Leopoldt (cf. [KC, Corollary 3.3.] et [N1, Corollaire 5.7]) :

$$\dim(\mathcal{H}_2^{ét}E/p) = \dim(A'_0/p) + \dim(W_E \cap p\mathcal{T}_E/pW_E),$$

où $\mathcal{T}_E$ désigne la $\mathbb{Z}_p$-torsion de $(G_E^{S_p})^{ab}$ et

$$W_E \simeq \Pi_{\mathfrak{p}|p}\mu(E_{\mathfrak{p}})/\mu(E),$$

qui s'envoie dans $\mathcal{T}_E$ par la théorie du corps de classes global.

En particulier, on a le corollaire suivant :

Corollaire 3.3.8. *Si E vérifie la conjecture de Leopoldt et si $\mu(X'_\infty) = 0$ (par exemple $E/\mathbb{Q}$ est abélien) alors pour tout $n \gg 0$,*

$$W_{E_n}/p \hookrightarrow \mathcal{T}_{E_n}/p.$$

On fixe un entier $i \geq 1$. La proposition 3.3.6 nous donne :

Proposition 3.3.9. *Supposons que $\mu(X'_\infty) = 0$. Pour tout $h \geq 1$, il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, l'inclusion de $WK_{2i}^{ét}(F_n)$ dans $K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_{F_n}^S)$ induit une injection :*

$$WK_{2i}^{ét}(F_n)/p^h \hookrightarrow K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_{F_n}^S)/p^h.$$

Démonstration. Il suffit de montrer le résultat pour le corps E. On déduit le résultat pour F en prenant la 1-composante.

On a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} WK_{2i}^{ét}(E_n)/p^h \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_{E_n}^S)/p^h \arrow[d, "="] \\ A_n^S/p^h(i) \arrow[r, hook] & K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_{E_n}^S)/p^h \end{tikzcd}$$

La flèche verticale de gauche est un isomorphisme d'après 3.3.6. La flèche horizontale du bas étant injective, on a donc l'injection :

$$WK_{2i}^{ét}(E_n)/p^h \hookrightarrow K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_{E_n}^S)/p^h.$$

$\square$

Cette proposition nous permet facilement de retrouver le fait que les noyaux de capitulation sont des facteurs directs des K-groupes pairs lorsque F_∞/F est la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique. C'est la méthode utilisée dans [Val1]. Pour tout $h \geq 0$ et tout $n \gg 0$, la proposition précédente nous donne l'injection :

$$\mathrm{Cap}_i(F_n) \hookrightarrow K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_{F_n}^S)/p^h.$$

On suppose ici que la conjecture de Quillen-Lichtenbaum est vraie et que $\sqrt{-1} \in F$ si $p = 2$. Pour n suffisamment grand, le noyau de capitulation $Cap_i(F_n)$ étant un facteur direct de $K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_{F_n}^S)$ pour tout ensemble fini S de places de F contenant $S_p \cup S_\infty$, on peut se demander si le résultat reste vrai pour le K-groupe du corps :

$$K_{2i}(F_n)\{p\} = \bigcup_S K_{2i}^{ét}(\mathcal{O}_{F_n}^S)$$

Il est connu que le noyau sauvage $WK_{2i}^{ét}(F_n)$ s'identifie dans notre cas au sous-groupe des éléments divibles

$$\mathrm{div}(K_{2i}(F_n)\{p\}) = \bigcap_{n\geq 1} p^n K_{2i}(F_n)\{p\}.$$

C'est un résultat dû à J. Tate pour $i = 1$; des généralisations sont dues à G. Banaszak, K. Hutchinson, M. Kolster, C. Weibel, etc...

Ainsi, le noyau

$$\mathrm{Cap}_i(F_n) = \ker\left(K_{2i}(F_n)\{p\} \to K_{2i}(F_\infty)\{p\}\right) \subseteq WK_{2i}^{ét}(F_n)$$

est un sous-groupe de $\mathrm{div}(K_{2i}(F_n)\{p\})$.

Par conséquent, lorsque $\mathrm{Cap}_i(F_n)$ n'est pas trivial, il n'est pas un facteur direct de $K_{2i}(F_n)$.

Chapitre 4

Sur la pro-p-extension localement cyclotomique maximale

Notons F_∞/F la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique d'un corps de nombres F. L'objet de ce chapitre est l'étude du groupe de Galois $\mathcal{G}'_\infty$ sur F_∞ de la pro-p-extension non ramifiée, p-décomposée maximale de F_∞. Les résultats principaux de ce chapitre sont les théorèmes 4.2.8 et 4.4.6 qui caractérisent la pro-p-liberté de $\mathcal{G}'_\infty$ au moyen de la trivialité de certains noyaux de capitulations.
Nous en déduisons différents critères explicites de non pro-p-liberté pour $\mathcal{G}'_\infty$.

4.1 Préliminaires cohomologiques

Fixons un nombre premier p. Dans ce paragraphe nous rappelons des résultats standards sur la cohomologie des groupes et la notion de pro-p-liberté. On peut trouver la plupart des résultats énoncés dans [NSW] ou [Se2].

Etant donné un groupe abélien M localement compact, on rappelle que M^* désigne le dual de Pontryagin de M. C'est le groupe $\mathrm{Hom}(M, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ des homomorphismes *continus* de M vers $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. On a une dualité parfaite $M \simeq (M^*)^*$ qui transforme les groupes discrets en groupes compacts.

Lorsque M est un pro-p-groupe ou un groupe discret de p-torsion

$$M^* = \mathrm{Hom}(M, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p).$$

Pour un groupe abélien M quelconque, $\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(M, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ est le pro-p-complété de M.

Soit G un groupe profini et M un G-module *compact*. Pour tout entier $n \geq 0$, les groupes d'homologie sont définis par dualité à partir des groupes de cohomologie :

$$H_n(G, M) := (H^n(G, M^*))^* .$$

Etant donné un pro-p-groupe G, on note G^{ab} l'abelianisé de G. C'est le quotient de G par l'adhérence de son sous-groupe dérivé $[G, G]$.
En outre, on a

$$G^{ab} \simeq H_1(G, \mathbb{Z}_p).$$

La notation $H \triangleleft G$ signifie que H est un sous-groupe distingué de G.

4.1.1 Pro-p-groupes libres

Commençons par rappeler la notion de pro-p-groupe libre.

Soient I un ensemble et L_I le groupe libre engendré par une famille d'éléments $(x_i)_{i \in I}$. Posons $F_I = \varprojlim L_I/H$, où la limite est prise sur la famille des sous-groupes normaux H de L_I tels que :
- L_I/H est un p-groupe fini.
- H contient presque tous les x_i.

Définition 4.1.1. *Le groupe F_I est le pro-p-groupe libre engendré par la famille $(x_i)_{i \in I}$.*

Les groupes F_I et F_J sont isomorphes si et seulement si I et J sont en bijection. Pour $I = \{1, \cdots, n\}$, on pose $F_n := F_I$.

Soit G un pro-p-groupe. Une *présentation libre* de G est une suite exacte $1 \to R \to F \to G \to 1$, où F est un pro-p-groupe libre. Une présentation libre de G est dite *minimale* si $F \simeq F_I$ et I est en bijection avec une base du $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel $H^1(G, \mathbb{F}_p)$. On note $d(G) := \dim_{\mathbb{F}_p}(H^1(G, \mathbb{F}_p))$ le p-rang de G. C'est le nombre minimal de générateurs de G.

Intéressons-nous à la notion de *p-dimension cohomologique*. Nous travaillons uniquement avec des pro-p-groupes ; ainsi dimension cohomologique et p-dimension cohomologique coïncident. Rappelons ces notions.

Définition 4.1.2. *Soit G un pro-p-groupe.*
- *On dit que G est de dimension cohomologique n si l'entier n est le plus petit tel que pour tout $\mathbb{Z}_p[G]$-module M discret de torsion, et tout $m > n$,*
$$H^m(G, M) = 0.$$
On note $\mathrm{cd}(G) := n$.
- *On dit que G est de dimension cohomologique stricte n si n est le plus petit entier tel que pour tout $\mathbb{Z}_p[G]$-module M discret, et tout $m > n$,*
$$H^m(G, M) = 0.$$
On note $\mathrm{scd}(G) := n$.

En particulier $\mathrm{cd}(G) = 0$ si et seulement si G est trivial.

Dimension cohomologique et dimension cohomologique stricte sont reliées par l'inégalité suivante :
$$\mathrm{cd}(G) \leq \mathrm{scd}(G) \leq \mathrm{cd}(G) + 1.$$

Enfin, on a le critère bien connu.

Proposition 4.1.3. *Soient G un pro-p-groupe et $n > 0$. Alors $\mathrm{cd}(G) = n$ si et seulement si $H^{n+1}(G, \mathbb{Z}/p)$ est trivial et $H^n(G, \mathbb{Z}/p)$ ne l'est pas.*

Il est possible de caractériser la pro-p-liberté d'un pro-p-groupe au moyen de la dimension cohomologique.

Proposition 4.1.4. *Soit G un pro-p-groupe non trivial. On a l'équivalence :*
(i) G est pro-p-libre.

(ii) $cd(G) = 1$.

Il en découle la caractérisation suivante :

Proposition 4.1.5. *Le groupe G est un pro-p-groupe libre si et seulement si $H^2(G, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = 0$ et G^{ab} est sans p-torsion.*

Démonstration. Supposons $H^2(G, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = 0$ et G^{ab} sans $\mathbb{Z}_p$-torsion. La suite d'homologie de la suite exacte courte

$$0 \to \mathbb{Z}_p \xrightarrow{p} \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}/p \to 0$$

induit la suite exacte

$$0 \to H_2(G, \mathbb{Z}_p)/p \to H_2(G, \mathbb{Z}/p) \to_p H_1(G, \mathbb{Z}_p) \to 0.$$

Comme G^{ab} n'a pas de $\mathbb{Z}_p$-torsion, on a un isomorphisme $H_2(G, \mathbb{Z}_p)/p \simeq H_2(G, \mathbb{Z}/p)$. Ainsi le module $H_2(G, \mathbb{Z}/p)$ est trivial. Donc $\mathrm{cd}(G) = 1$.

La réciproque est claire. □

Le corollaire suivant nous sera utile dans la suite :

Proposition 4.1.6. *Le groupe G est pro-p-libre si et seulement si* $\mathrm{scd}(G) = 2$ *et G^{ab} est sans p-torsion.*

Démonstration. Si G est pro-p-libre alors clairement $\mathrm{scd}(G) = 2$ et G^{ab} n'a pas de p-torsion.

Montrons la réciproque. D'après la proposition précédente, il suffit de voir que $scd(G) = 2$ entraîne $H^2(G, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = 0$.
Pour tout $n \geq 1$, le groupe $H^n(G, \mathbb{Q})$ est nul. Lorsque G est fini cela provient de la p-divisibilité de $\mathbb{Q}$. Si G n'est pas fini, il suffit de remarquer que

$$H^n(G, \mathbb{Q}) = \varinjlim H^n(G/U, \mathbb{Q}),$$

où U parcourt la famille des sous-groupes ouverts distingués de G.

La suite exacte courte de groupes discrets :

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0,$$

donne après passage à la cohomologie :

$$H^2(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \simeq H^3(G, \mathbb{Z}),$$

ce qui permet de conclure. □

4.1.2 Le transfert

Etant donnés un pro-p-groupe G et un sous-groupe H *d'indice fini* de G, on définit (cf. [Se1, VII, §8]) un morphisme canonique

$$\mathrm{Ver} : G^{ab} \to H^{ab},$$

qui s'identifie à l'homomorphisme de restriction entre groupes d'homologie :

$$\mathrm{res} : H_1(G, \mathbb{Z}_p) \to H_1(H, \mathbb{Z}_p).$$

Par dualité, le transfert s'identifie à l'application de corestriction entre les groupes de cohomologie :

$$\mathrm{cor} : H^1(H, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \to H^1(G, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p).$$

On a la proposition :

Proposition 4.1.7. *Si H est un sous-groupe distingué de G d'indice fini, la co-restriction induit un morphisme*

$$H^1(H, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)_{G/H} \stackrel{\mathrm{cor}}{\to} H^1(G, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$$

dont le noyau et le co-noyau sont annulés par $[G : H]$.

Démonstration. Le noyau est tué par $[G : H]$. En effet, si on désigne par res le morphisme de restricion cohomologique on a :

$$\mathrm{res} \circ \mathrm{cor}(x) = \sum_{\sigma \in G/H} \sigma x.$$

Par ailleurs

$$[G : H]x = \sum_{\sigma \in G/H} x = \sum_{\sigma \in G/H} (\sigma x + (1 - \sigma)x).$$

Ainsi si $\mathrm{cor}\, x = 0$ alors la dernière somme est nulle dans $H^1(H, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)_{G/H}$. Enfin le conoyau de cor est tué par $[G : H]$ puisque pour $x \in H^1(G, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ on a l'égalité $[G : H]x = \mathrm{cor} \circ \mathrm{res}(x)$. $\square$

La proposition suivante fait un lien entre l'étude du transfert et la dimension cohomologique stricte (cf. [NSW, Theorem 3.6.4]). Elle caractérise les groupes profinis dont la dimension cohomologique stricte est égale à 2. Ces groupes sont particulièrement importants, notamment parce qu'ils apparaissent naturellement en théorie du corps de classes. Cette proposition est une combinaison de résultats dûs à J.-P. Serre et J. Tate.

Proposition 4.1.8. *Soit G un groupe profini non nul. Les propositions suivantes sont équivalentes :*
(i) La dimension cohomologique stricte de G est 2.

(ii) Pour tout couple de sous-groupes ouverts distingués $V \triangleleft U$, le transfert induit un isomorphisme $U^{ab} \xrightarrow{\simeq} (V^{ab})^{U/V}$.

Nous proposons une adaptation de la proposition précédente ; celle-ci permet de caractériser exactement la pro-p-liberté d'un groupe au moyen du tansfert.

Proposition 4.1.9. *Soit G un pro-p-groupe non nul. Les propositions suivantes sont équivalentes :*
(i) G est pro-p-libre.

(ii) Pour tout sous-groupe ouvert $U \triangleleft G$ le module U^{ab} est $\mathbb{Z}_p$-libre et pour tout couple de sous-groupes ouverts $V \triangleleft U$, le transfert induit une injection

$$U^{ab} \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \hookrightarrow V^{ab} \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p.$$

Démonstration. Montrons $(i) \Rightarrow (ii)$. Comme G est pro-p-libre, un sous-groupe ouvert $U \subseteq G$ est également pro-p-libre. Ainsi U^{ab} est $\mathbb{Z}_p$-module abelien libre ; on utilisera alors dans la suite le fait suivant : l'élément $x \otimes \frac{1}{p^n}$ est trivial dans $U^{ab} \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ si et seulement si il existe $y \in U^{ab}$ tel que $x = p^n y$

Considérons l'application :

$$\mathcal{V} : \ U^{ab} \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \to V^{ab} \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, \quad x \otimes \frac{1}{p^n} \mapsto \mathrm{Ver}(x) \otimes \frac{1}{p^n}.$$

Si $x \otimes \frac{1}{p} \in \ker(\mathcal{V})$ alors $\mathrm{Ver}(x) = py \in (V^{ab})^{U/V}$, avec $y \in V^{ab}$. Donc pour tout $\sigma \in U/V$, on a

$$py = (py)^\sigma = p(y^\sigma).$$

Ainsi $p(y^\sigma - y) = 0$ et comme V^{ab} est sans $\mathbb{Z}_p$-torsion $y^\sigma = y \in (V^{ab})^{U/V}$. Comme $scd(G) = 2$, d'après la proposition 4.1.8, $y = Ver(x')$, où $x' \in U^{ab}$. Enfin Ver est injectif donc $x = px'$. Ainsi $x \otimes \frac{1}{p} = 0$ et $\mathcal{V}$ est injectif.

Montrons $(ii) \Rightarrow (i)$. D'après l'hypothèse, G^{ab} est sans $\mathbb{Z}_p$-torsion. Pour montrer que G est pro-p-libre il nous suffit de voir, d'après la proposition 4.1.6, que $scd(G) = 2$. D'après la proposition 4.1.8, il suffit de voir que le transfert

$$\mathrm{Ver} : U^{ab} \to (V^{ab})^{U/V}$$

est bijectif.

Le groupe U^{ab} est sans $\mathbb{Z}_p$-torsion. Or $\ker(\mathrm{Ver})$ est annulé par $|U/V|$ donc Ver est injectif.

Le conoyau $(V^{ab})^{U/V} / \mathrm{Ver}(U^{ab})$ est de torsion. Soit $y \in (V^{ab})^{U/V}$ un élément annulé par p dans $(V^{ab})^{U/V} / \mathrm{Ver}(U^{ab})$. Il existe $x \in U^{ab}$ tel que $py = \mathrm{Ver}(x)$. On a

$$\mathcal{V}(x \otimes \frac{1}{p}) = \mathrm{Ver}(x) \otimes \frac{1}{p} = 0.$$

Or $\mathcal{V}$ est injectif donc $x = px'$. Enfin $py = p\,\mathrm{Ver}(x')$ donc $y = \mathrm{Ver}(x')$ et y est nul dans $(V^{ab})^{U/V} / \mathrm{Ver}(U^{ab})$. Ce dernier est donc trivial. □

Remarque. Comme nous l'a fait remarquer T. Nguyen Quang Do, le résultat s'obtient également au moyen du diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & U^{ab} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Ver}"] & U^{ab} \otimes \mathbb{Q}_p \arrow[r] \arrow[d] & U^{ab} \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{V}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \left(V^{ab}\right)^{U/V} \arrow[r] & \left(V^{ab} \otimes \mathbb{Q}_p\right)^{U/V} \arrow[r] & \left(V^{ab} \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p\right)^{U/V} &
\end{tikzcd}$$

en comparant les groupes $\mathrm{coker}(\mathrm{Ver})$ et $\ker(\mathcal{V})$.

4.2 Une caractérisation de la pro-p-liberté de $\mathcal{G}'_\infty$

4.2.1 Extensions localement cyclotomiques

Notre but dans cette partie est d'étudier le comportement galoisien des noyaux sauvages étales et de mettre en évidence le rôle particulier joué par les extensions *localement cyclotomiques*. Pour cela, rappelons quelques définitions et notations.

Désormais le premier p est supposé impair. Si N est un corps local ou global de caractéristique différente de p on note N_∞ la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de N.

Définition 4.2.1. *Une (pro-)p-extension L/F de corps de nombres est localement cyclotomique si pour toute place finie v de F et toute place $w|v$ de L on a l'inclusion :*

$$L_w \subseteq (F_v)_\infty.$$

Remarques.

1. Dans la terminologie introduite par J.-F. Jaulent (cf. [J5]), les extensions localement cyclotomiques sont exactement les extensions non *logarithmiquement* ramifiées.
2. Une extension localement cyclotomique est p-ramifiée.

Intéressons-nous maintenant à

$$\mathcal{L}'_{F_\infty} = \bigcup_{F \subset L} L,$$

où L parcourt la classe des p-extensions localement cyclotomiques de F.

L'extension $\mathcal{L}'_{F_\infty}/F$ est galoisienne et contient la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique F_∞/F. La conjecture de Gross pour le corps F en p revient à affirmer que la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique est la seule $\mathbb{Z}_p$-extension de F contenue dans $\mathcal{L}'_{F_\infty}$. Dans [JS] les auteurs proposent une construction "explicite" de la pro-p-extension $\mathcal{L}'_{F_\infty}/F$ au moyen de la tour localement cyclotomique de F.

Pour finir, on introduit les groupes de Galois :

$$\mathcal{G}'_F := \mathrm{Gal}(\mathcal{L}'_{F_\infty}/F) \text{ et } \Gamma := \mathrm{Gal}(F_\infty/F),$$

ainsi que

$$\mathcal{G}'_{F_\infty} := \mathrm{Gal}(\mathcal{L}'_{F_\infty}/F_\infty).$$

La pro-p-extension $\mathcal{L}'_{F_\infty}/F_\infty$ est aussi la pro-p-extension non ramifiée, p-décomposée, maximale de F_∞. Par la théorie du corps de classes c'est aussi la pro-p-extension non ramifiée, décomposée en *toute* place, maximale de F_∞. Notons que

$$(\mathcal{G}'_{F_\infty})^{ab} = X'_{F_\infty}.$$

On pose $\Delta := \mathrm{Gal}(F(\mu_p)/F)$ (resp. $\Delta_v := \mathrm{Gal}(F_v(\mu_p)/F_v)$) et d (resp. d_v) son ordre.

Intéressons-nous maintenant à la codescente des noyaux sauvages étales dans les p-extensions localement cyclotomiques. Dans ce qui suit les résultats sont énoncés pour les noyaux $WK_{2i}^{ét}(F)$ (i.e. $i \geq 1$). Ils se généralisent à tous les noyaux $\mathcal{H}_{2i}^{ét}(F)$ (avec $i \in \mathbb{Z} - \{0\}$) dès que la conjecture $C_i(F)$ est vraie.

Comme cela est montré dans [KM, Proposition 2.3] ou dans [JMi, Proposition 10], et contrairement aux K-groupes pairs, le morphisme de norme n'est pas tout le temps surjectif. C'est dans le cas des extensions localement cyclotomiques que la surjectivité est mise en défaut. Plus précisément on a la proposition suivante :

Proposition 4.2.2. *Soit L/F une extension cyclique de degré p de corps de nombres. La norme*

$$WK_{2i}^{ét}(L) \to WK_{2i}^{ét}(F)$$

n'est pas surjective si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :
(i) $i \equiv 0 \bmod d$;
(ii) l'extension L/F est localement cyclotomique mais n'est pas cyclotomique (i.e. $L \not\subset F_\infty$).

Il est même possible de calculer exactement l'ordre du conoyau de la norme dans une p-extension cyclique (cf. [KM, Proposition 2.3] pour le cas de degré p et [Gri, Lemma 4.2.1] pour le cas général).

Proposition 4.2.3. *Soient L/F une p-extension cyclique, localement cyclotomique, de degré p^n et un entier $i \equiv 0 \bmod d$. Posons $e = [L : L \cap F_\infty]$. Alors le conoyau de la norme :*

$$\mathrm{coker}(WK_{2i}^{ét}(L) \to WK_{2i}^{ét}(F))$$

est isomorphe à $H^0(F, \mathbb{Z}/e(-i))$.

Comme corollaire à cette proposition nous donnons une condition suffisante pour que F satisfasse la conjecture de Gross en p (i.e. $C_0(F)$). Dans le second chapitre, nous avons vu que la conjecture est vraie sous l'hypothèse de trivialité de $WK_{2i}(F)$ avec $i \equiv 0 \bmod d$. Le corollaire suivant "généralise" cette condition suffisante : il montre que la conjecture est vraie dès que $WK_{2i}(F)$ est "suffisamment petit".
Rappelons la notation : $\omega_i(F) := |H^0(F, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))|$.

Corollaire 4.2.4. *S'il existe un entier $i \equiv 0 \bmod d$ tel que $WK_{2i}^{\acute{e}t}(F)$ ne contient aucun élément d'ordre $\omega_i(F)$, alors F satisfait la conjecture de Gross en p.*

Démonstration. Si F ne vérifie pas la conjecture de Gross en p alors il existe une $\mathbb{Z}_p$-extension localement cyclotomique L_∞/F, qui n'est pas la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique F_∞/F. Considérons l'entier $n_0 \geq 0$ tel que $F_\infty \cap L_\infty = F_{n_0}$.

Pour tous les étages L_n/F de L_∞/F avec $[L_n : F] = p^n$, la proposition 4.2.3 nous donne une *surjection* :

$$WK_{2i}^{\acute{e}t}(F) \to H^0(F, \mathbb{Z}/p^{(n-n_0)}(-i)).$$

Par ailleurs, il existe $N \geq 1$ tel que pour tout $n \geq N$

$$H^0(F, \mathbb{Z}/p^{n-n_0}(-i)) = H^0(F, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(-i)),$$

et on a donc une surjection :

$$WK_{2i}^{\acute{e}t}(F) \to H^0(F, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(-i)).$$

Ainsi $WK_{2i}^{\acute{e}t}(F)$ contient un élément d'ordre $\omega_i(F)$. $\square$

Intéressons-nous maintenant au morphisme d'extension

$$WK_{2i}^{\acute{e}t}(F) \to WK_{2i}^{\acute{e}t}(L)^G$$

dans le cas des p-extensions localement cyclotomiques.

Dans un premier temps, on peut comparer les noyaux de capitulation des noyaux sauvages étales et des K-groupes pairs. Le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & WK_{2i}^{\acute{e}t}(F) \arrow[r] \arrow[d] & K_{2i}^{\acute{e}t}(\mathcal{O}_F^S) \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{\bigoplus}_{v\in S} H^2(F_v, \mathbb{Z}_p(i+1)) \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & WK_{2i}^{\acute{e}t}(L)^G \arrow[r] & K_{2i}^{\acute{e}t}(\mathcal{O}_L^S)^G \arrow[r] & \big(\widetilde{\bigoplus}_{w\in S_L} H^2(L_w, \mathbb{Z}_p(i+1))\big)^G &
\end{tikzcd}$$

nous montre que $\ker(WK_{2i}^{\acute{e}t}(F) \to WK_{2i}^{\acute{e}t}(L)^G) = \mathrm{Cap}_i(L/F)$

Proposition 4.2.5. *Soit L/F une p-extension localement cyclotomique de groupe de Galois G.*
On a l'inégalité entre les ordres

$$|WK_{2i}^{\acute{e}t}(F)| \geq |WK_{2i}^{\acute{e}t}(L)^G|.$$

En particulier, l'extension $WK_{2i}^{\acute{e}t}(F) \to WK_{2i}^{\acute{e}t}(L)^G$ est injective si et seulement si elle est bijective.

Démonstration. On déduit du diagramme commutatif précédent :

$$\ker(WK_{2i}^{\acute{e}t}(F) \to WK_{2i}^{\acute{e}t}(L)^G) \simeq H^1(G, K_{2i+1}^{\acute{e}t}(L))$$

et

$$\mathrm{coker}(WK_{2i}^{\acute{e}t}(F) \to WK_{2i}^{\acute{e}t}(L)^G) \hookrightarrow H^2(G, K_{2i+1}^{\acute{e}t}(L)).$$

La proposition résulte alors de l'égalité :

$$|H^1(G, K_{2i+1}^{\acute{e}t}(L))| = |H^2(G, K_{2i+1}^{\acute{e}t}(L))|.$$

□

Soit L/F une extension localement cyclotomique cyclique de degré p. D'après ce qui précède on voit facilement que

$$|\ker(WK_{2i}^{\acute{e}t}(L)_G \to WK_{2i}^{\acute{e}t}(F))| = 1 \text{ ou } p.$$

On ne dispose pas de formules de genres analogues à celles données dans [KM], qui nous permettraient de déterminer l'ordre du noyau précédent dans le cas localement cyclotomique. Comme nous allons le voir dans ce qui suit, le comportement galoisien des noyaux sauvages dans de telles extensions est fortement relié à la structure du pro-p-groupe $\mathcal{G}'_{F_\infty}$.

On pose $E = F(\mu_p)$. On a donc $\Delta = \mathrm{Gal}(E/F)$ et

$$(X'_{E_\infty})_\Delta \simeq X'_{F_\infty}.$$

La proposition suivante caractérise la descente galoisienne pour les noyaux sauvages dans la famille des extensions cyclotomiques :

Proposition 4.2.6. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*
(i) Le $\mathbb{Z}_p$-module X'_{F_∞} est abélien libre.

(ii) L'invariant $\mu(X'_{F_\infty})$ est nul et pour tout $i \equiv 0 \bmod d$ on a la descente galoisienne

$$WK_{2i}^{ét}(F) \simeq WK_{2i}^{ét}(F_\infty)^\Gamma.$$

(iii) L'invariant $\mu(X'_{F_\infty})$ est nul et il existe un entier $i \equiv 0 \bmod d$ tel que

$$WK_{2i}^{ét}(F) \simeq WK_{2i}^{ét}(F_\infty)^\Gamma.$$

4.2.2 Descente galoisienne pour les noyaux sauvages étales

Étant donné un corps de nombres E contenant μ_p on s'intéresse dans cette section au caractère pro-p-libre éventuel du groupe $\mathcal{G}'_\infty := \mathcal{G}'_{E_\infty}$.

Exemples.
- Si E est un corps p-rationnel (cf [GrJ], [Mo] et [MN]) alors $\mathcal{G}'_\infty$ est trivial (donc pro-p-libre de rang 0). Plus généralement $\mathcal{G}'_\infty = 0$ si et seulement si $WK_{2i}^{ét}(E) = 0$.
- Si $(X'_\infty)^0 = 0$, $\mu(X'_\infty) = 0$ et $\lambda(X'_\infty) = 1$ alors $X'_\infty \simeq \mathbb{Z}_p$. Ainsi $\mathcal{G}'_\infty \simeq \mathbb{Z}_p$ (donc pro-p-libre de rang 1). Ces conditions sont satisfaites pour les corps suivants (cf. [W]) :

$$E = \mathbb{Q}(\mu_p), \text{ avec } p = 37, 59, 67, 101, 103, 131, 149, 233, 257, 263.$$

On ne connait pas d'exemple de corps de nombres tel que $\mathcal{G}'_\infty$ est pro-p-libre de rang $d(\mathcal{G}'_\infty) > 1$. Par contre, nous construirons dans la suite des exemples de corps E avec $\mathcal{G}'_\infty$ non pro-p-libre.

La proposition 4.2.6 établit un lien entre la structure de $\mathcal{G}'_\infty$ et la descente galoisienne dans la classe des extensions cyclotomiques. Le théorème 4.2.8 qui suit examine le cas où la descente est étendue à la classe des extensions *localement* cyclotomiques ; on caractérise alors la pro-p-liberté de $\mathcal{G}'_\infty$. On peut trouver une preuve de $(i) \Rightarrow (ii)$ dans [Vau, Proposition 4.5], et une preuve de la réciproque dans [N3, théorème 3.1]. Nous proposons ici une démonstration de l'équivalence, différente des deux précédentes et qui se base essentiellement sur l'équivalence montrée dans la proposition 4.1.9.

Nous supposerons que l'invariant "mu" associé à E_∞/E est trivial, de sorte que, pour toute p-extension L/E localement cyclotomique, l'invariant "mu" associé à L_∞/L est aussi trivial (cf. par exemple [NSW, Theorem 11.3.8]). C'est une conséquence de la forme faible de la conjecture de Leopoldt, qui est vraie pour la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique E_∞/E.

Étant donnée une p-extension M/L localement cyclotomique contenant E, on a le diagramme :

$$\begin{tikzcd} WK_{2i}^{ét}(L_\infty) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & WK_{2i}^{ét}(M_\infty) \arrow[d, "\simeq"] \\ \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i) \otimes X'_{L_\infty} \arrow[r, "\mathcal{V}"] & \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i) \otimes X'_{M_\infty} \end{tikzcd} \tag{4.2.1}$$

où

- le morphisme $\mathcal{V}$ provient du transfert (il est défini dans la proposition 4.1.9),
- les flèches verticales sont les isomorphismes montrés dans la proposition 3.3.1,
- la flèche horizontale supérieure provient par limite inductive des morphismes d'extension

$$WK_{2i}^{ét}(L_n) \to WK_{2i}^{ét}(M_n).$$

Lemme 4.2.7. *Le diagramme 4.2.1 est commutatif.*

Démonstration. Les flèches horizontales dans le diagramme 4.2.1 proviennent par dualité de la co-restriction :

$$H^1(\mathcal{G}'_{M_\infty}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \to H^1(\mathcal{G}'_{L_\infty}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p).$$

□

Théorème 4.2.8. *Soit E un corps de nombres contenant μ_p. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) Le groupe $\mathcal{G}'_{E_\infty}$ est pro-p-libre.

(ii) L'invariant $\mu(X'_\infty)$ est nul et pour toute p-extension L/E localement cyclotomique et pour tout $i \geq 1$, on a l'isomorphisme canonique :

$$WK_{2i}^{\acute{e}t}(E) \overset{\simeq}{\to} WK_{2i}^{\acute{e}t}(L)^G,$$

où $G = \mathrm{Gal}(L/E)$.

Démonstration. D'après la proposition 4.1.9, le groupe $\mathcal{G}'_{E_\infty}$ est pro-p-libre si et seulement si pour tout sous groupe ouvert $U \triangleleft \mathcal{G}'_{E_\infty}$

(a) U^{ab} est $\mathbb{Z}_p$-libre.

(b) Pour tout sous groupe ouvert $V \triangleleft U$,

$$\mathcal{V} : \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \otimes U^{ab} \to \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \otimes V^{ab},$$

est injectif.

Supposons que (a) et (b) sont satisfaites. Soit L une p-extension localement cyclotomique de E. Le groupe $\mathcal{G}'_{L_\infty}$ est un sous-groupe ouvert distingué de $\mathcal{G}'_{E_\infty}$. L'hypothèse (b) et la commutativité de (4.2.1) nous donnent

$$WK_{2i}^{\acute{e}t}(E_\infty) \hookrightarrow WK_{2i}^{\acute{e}t}(L_\infty).$$

Soit l'entier $n_0 \geq 0$ tel que $E_{n_0} = E_\infty \cap L$. Les groupes de Galois $\Gamma_{E_{n_0}} := \mathrm{Gal}(E_\infty/E_{n_0})$ et $\Gamma_L := \mathrm{Gal}(L_\infty/L)$ sont *canoniquement* isomorphes. Posons $\Gamma := \Gamma_{E_{n_0}} \simeq \Gamma_L$. On peut alors passer aux invariants sous Γ dans l'inclusion précédente. L'hypothèse (a) et la proposition 4.2.6 nous donnent ainsi l'inclusion :

$$WK_{2i}^{\acute{e}t}(E_{n_0}) \hookrightarrow WK_{2i}^{\acute{e}t}(L).$$

La descente galoisienne des noyaux sauvages est satisfaite dans E_∞/E. Ainsi $\mathrm{Cap}_i(L/E) = 0$. La surjectivité résulte de la proposition 4.2.5.

Montrons que l'assertion (ii) entraîne (a) et (b).

Soit $U \triangleleft \mathcal{G}_{E_\infty}$ un sous-groupe ouvert. Il existe un entier n_0 et une p-extension L/E_{n_0} localement cyclotomique telle que $U^{ab} = X'_{L_\infty}$. Par hypothèse, pour tout entier $m \geq 0$ on a $\mathrm{Cap}_i(L_m/E) = 0$. Donc d'après la proposition 1.2.6, on a aussi $\mathrm{Cap}_i(L_m/L) = 0$. Enfin la proposition 4.2.6 nous donne la $\mathbb{Z}_p$-liberté de U^{ab} et démontre (a).

Soit un couple de sous-groupes ouverts $V \triangleleft U$. Il existe un couple d'extensions de E, localement cyclotomiques, $L \subseteq M$ telles que

$$U^{ab} = X'_{L_\infty} \text{ et } V^{ab} = X'_{M_\infty}.$$

Toujours d'après l'hypothèse (ii) et la proposition 1.2.6, on a pour tout $n \gg 0$, l'injection

$$WK_{2i}^{\acute{e}t}(L_n) \hookrightarrow WK_{2i}^{\acute{e}t}(M_n).$$

Enfin on a bien $WK_{2i}^{\acute{e}t}(L_\infty) \hookrightarrow WK_{2i}^{\acute{e}t}(M_\infty)$ et la commutativité de (4.2.1) permet de conclure à l'injectivité de $\mathcal{V}$. □

Le théorème 4.2.8 s'étend sans peine au cas des corps de nombres F ne contenant pas les racines $p-$ièmes de l'unité, pourvu que l'on restreigne la valeur des twists i aux multiples de $d = [F(\mu_p) : F]$. Cela résulte immédiatement de la première remarque qui suit le théorème 2.3.5. On obtient donc l'énoncé suivant :

Théorème 4.2.9. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) Le groupe $\mathcal{G}'_{F_\infty}$ est pro-p-libre.

(ii) L'invariant $\mu(X'_{F_\infty})$ est nul et pour toute p-extension L/F localement cyclotomique et pour tout entier $i \equiv 0 \bmod d$, on a l'isomorphisme canonique :

$$WK_{2i}^{\acute{e}t}(F) \xrightarrow{\simeq} WK_{2i}^{\acute{e}t}(L)^G,$$

où $G = \mathrm{Gal}(L/F)$.

4.3 Applications

4.3.1 Le cas pro-p-cyclique

Un groupe non trivial $\mathcal{G}$ est dit *pro-p-cyclique* lorsqu'il est limite projective de p-groupes cycliques. Autrement dit,

$$\mathcal{G} \simeq \mathbb{Z}/p^N \text{ ou } \mathcal{G} \simeq \mathbb{Z}_p,$$

ou encore, de manière équivalente $d(\mathcal{G}) = 1$.

Comme corollaire à la démonstration du théorème 4.2.8, nous obtenons un critère pour la pro-p-cyclicité de $\mathcal{G}'_\infty$.

Proposition 4.3.1. *Soit E un corps de nombres contenant μ_p et tel que $\mu(X'_\infty) = 0$. S'il existe une extension L/F cyclique de degré p, localement cyclotomique et disjointe de E_∞ telle que le morphisme d'extension*

$$WK_{2i}^{ét}(E) \to WK_{2i}^{ét}(L)$$

est surjectif, alors le groupe $\mathcal{G}'_\infty$ est pro-p-cyclique.

Démonstration. Posons $M := \operatorname{coker}\big(\big(X'_{E_\infty} / \operatorname{Ver}(X'_{L_\infty})\big)\big)$.

On a la suite exacte :

$$X'_{E_\infty}(i) \overset{\text{Ver}}{\to} X'_{L_\infty}(i) \to M(i) \to 0.$$

On pose $\Gamma := \operatorname{Gal}(E_\infty/E) \simeq \operatorname{Gal}(L_\infty/L)$. En passant aux co-invariants sous l'action de Γ, on obtient la suite exacte :

$$WK_{2i}^{ét}(E) \to WK_{2i}^{ét}(L) \to M(i)_\Gamma \to 0.$$

Donc d'après l'hypothèse le groupe $M(i)_\Gamma$ est nul. On conclut alors à la trivialité de M par le lemme de Nakayama. Le transfert est ainsi surjectif et de manière duale :

$$H^1(\mathcal{G}'_{E_\infty}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \overset{\text{cor}}{\hookrightarrow} H^1(\mathcal{G}'_{L_\infty}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p).$$

Ainsi l'égalité $\text{cor} \circ \text{res} = p$ et l'injectivité de la co-restriction nous donnent :

$$\ker(\text{res}) = {}_pH^1(\mathcal{G}'_{E_\infty}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \simeq H^1(\mathcal{G}'_{E_\infty}, \mathbb{Z}/p).$$

Par ailleurs, la suite exacte d'inflation-restriction nous donne aussi :

$$\ker(\text{res}) = H^1(\operatorname{Gal}(L/E), \mathbb{Z}/p).$$

Or $\operatorname{Gal}(L/E) \simeq \mathbb{Z}/p$, donc $H^1(\mathcal{G}'_{E_\infty}, \mathbb{Z}/p) \simeq \mathbb{Z}/p$. $\square$

Étudions une réciproque à cette proposition. Dans le cas où $\mathcal{G}'_{E_\infty} = X'_{E_\infty} \simeq \mathbb{Z}_p$, le transfert vers un sous-groupe ouvert $\mathcal{G}'_{L_\infty} \lhd \mathcal{G}'_{E_\infty}$ s'identifie à la multiplication par $[L:E]$ et nous donne un isomorphisme :

$$X'_{E_\infty}(i) \overset{\mathrm{Ver}}{\simeq} X'_{L_\infty}(i).$$

Corollaire 4.3.2. *Sous les hypothèses de la proposition précédente, si $\mathcal{G}'_{E_\infty} \simeq \mathbb{Z}_p$, alors pour tout $n \geq 0$, l'extension induit un isomorphisme*

$$WK_{2i}^{ét}(E_n) \simeq WK_{2i}^{ét}(L_n).$$

4.3.2 Critères de non pro-p-liberté

Dans cette partie nous utilisons le théorème 4.2.8 pour produire des corps de nombres E avec un groupe de Galois $\mathcal{G}'_\infty$ qui n'est pas pro-p-libre. Il s'agit d'avoir un noyau sauvage "suffisamment" grand. Avant cela rappelons que l'on dispose du critère d'infinitude suivant (cf. [JS, Théorème 12] puis [As, Théorème 3]) :

Théorème 4.3.3. *Soit E un corps de nombres contenant μ_p tel que*

$$\mathrm{rg}_p(WK_{2i}(E)) \geq 1 + 2\sqrt{r_2(E)+2}, \tag{4.3.1}$$

alors $\mathcal{G}'_\infty$ est infini.

Remarques

1. L'inégalité 4.3.1 est une adaptation du théorème de Golod et Safarevic sur les tours de corps de classes de Hilbert. Les méthodes cohomologiques utilisées sont de même nature.
2. Il existe des versions meilleures de ce critère d'infinitude (cf. [JM1] et [JM2]).

Donnons maintenant des critères de non pro-p-liberté pour le groupe $\mathcal{G}'_\infty$.

Le cas général

Nous commençons par le cas où E est un corps quelconque, mais contenant μ_p.

Théorème 4.3.4. *Soit E un corps de nombres contenant μ_p, tel que $\mu(X'_\infty) = 0$ et*

$$\mathrm{rg}_p(WK_{2i}^{\acute{e}t}(E)) \geq 1 + r_2(E). \tag{4.3.2}$$

Alors $\mathcal{G}'_\infty$ n'est pas un pro-p-groupe libre.

Démonstration. Soit L_0/E la sous-extension de $\mathcal{L}'_\infty/E$, abéliennne d'exposant p maximale. Alors

$$\begin{aligned} \mathrm{Gal}(L_0/E) &= \mathcal{G}'/(\mathcal{G}'^p[\mathcal{G}', \mathcal{G}']) \\ &\simeq \widetilde{\mathcal{C}\ell}_E/p \times \mathbb{Z}/p \\ &= \mathcal{H}_0^{\acute{e}t}(F) \times \mathbb{Z}/p. \end{aligned}$$

Ainsi, comme $\mu_p \subset E$, on a les égalités entre p-rangs

$$d(\mathrm{Gal}(L_0/E)) = 1 + \mathrm{rg}_p(WK_{2i}^{\acute{e}t}(E)).$$

Donc d'après la proposition 1.2.9 le noyau $\mathrm{Cap}_i(L_0/F)$ est non nul. Comme L_0/E est une p-extension localement cyclotomique, la capitulation porte sur le noyau $WK_{2i}^{\acute{e}t}(E)$ et le théorème 4.2.8 permet de conclure. □

L'inégalité (4.3.1) entraîne l'inégalité (4.3.2) dès que $r_2(E) \geq 5$. Ainsi, un corps satisfaisant aux conditions du théorème 4.3.4 et de degré au moins 10 sur $\mathbb{Q}$ admet un groupe $\mathcal{G}'_\infty$ infini *et* non pro-p-libre.

Corollaire 4.3.5. *Sous les hypothèses du théorème 4.3.4, et si au moins une place p-adique se ramifie totalement dans E_∞/E, alors l'inégalité*

$$\mathrm{rg}_p(A'_E) \geq 1 + r_2(E)$$

implique que $\mathcal{G}'_\infty$ n'est pas pro-p-libre.

Démonstration. En effet, si au moins une place p-adique se ramifie totalement dans E_∞/E, d'après la proposition 1.3.8 on a une surjection canonique

$$WK_{2i}^{\acute{e}t}(E)/p \to A'_E/p(i)$$

□

Pour vérifier que le critère du théorème 4.3.4 est intéressant il faut trouver des corps de nombres E qui satisfont l'inégalité (4.3.2). Le principe est le suivant : dans une p-extension F/k, le p-rang des noyaux sauvages étales de F est suffisamment grand dès que l'extension F/k est suffisamment ramifiée. Nous pouvons utiliser la proposition suivante qui permet de construire des corps de nombres dont le groupe de p-classes admet un p-rang suffisamment grand (cf. [NSW, Proposition 10.8.3]).

Proposition 4.3.6. *Soit F/k une p-extension cyclique. Soit S l'ensemble des places de k, formé des places qui se ramifient dans F et de S_∞. Supposons que S contient S_p. Alors on a l'inégalité :*

$$\mathrm{rg}_p\, A'_F \geq |S - (S_p \cup S_\infty)| - r_1(k) - r_2(k) - \delta + r'_1(k),$$

où $r'_1(k)$ est le nombre de places rélles de k qui se complexifient dans F et δ vaut 0 ou 1 selon que $\mu_p \not\subset k$ ou $\mu_p \subset k$.

La proposition précédente et le corollaire 4.3.5 nous donnent immédiatement le critère suivant :

Proposition 4.3.7. *Soit E/k une extension cyclique de degré $p > 2$. Supposons que E satisfait les conditions du théorème 4.3.4 et que E_1/E est ramifiée en au moins une place p-adique. Notons $Ram(E/k)$ l'ensemble des places qui se ramifient dans E/k et supposons que $S_p \subseteq Ram(E/k)$, où S_p désigne l'ensemble des places p-adiques de k.*
Alors l'inégalité

$$|Ram(E/k) - S_p| \geq 2 + (p+1)r_2(k)$$

entraine que $\mathcal{G}'_\infty$ n'est pas pro-p-libre.

Exemple. Soit $E/\mathbb{Q}$ une extension abélienne. On s'assure ainsi la trivialité de l'invariant $\mu(X'_\infty)$. Supposons que $E/\mathbb{Q}(\mu_p)$ est une extension cyclique de degré p, ramifiée au dessus de p et dans laquelle au moins $\frac{p^2+3}{2}$ places non p-adiques se ramifient. Alors le groupe $\mathcal{G}'_\infty$ n'est pas pro-p-libre.

Remarques :
- Étant donnés un premier impair p et un corps de nombre k, la proposition précédente (sous l'hypothèse "mu=0") permet de construire une infinité de p-extensions E/k telles $\mathcal{G}'_{E_\infty}$ n'est pas pro-p-libre.

– Il est possible d'obtenir directement (i.e. sans passer par le groupe des p-classes) une majoration du p-rang du noyau sauvage. Pour cela, on utilise la *théorie logarithmique des genres*.
Étant donnée une extension cyclique F/k de degré p, notons $\rho(F/k)$ le nombre de places v de k telles que si w est une place de F divisant v alors $F_w \not\subset k_{v,\infty}$. Une telle place est dite *non-logarithmiquement* ramifiée. Dans [KM], l'ensemble de ces places est notée $T_{F/k}^{(1+i)}$ avec $i \equiv 0 \bmod d$. Notons enfin $\widetilde{\mathcal{E}}_k$ le groupe des unités logarithmiques de k (cf. [J4] ou chapitre 4 pour un rappel). On a le résultat suivant ([JM1, Théorème]) :
Théorème 4.3.8. *Soit F/k une extension de corps de nombres, cyclique de degré p. On a l'inégalité :*

$$\mathrm{rg}_p(\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F) \geq \rho(F/k) - \mathrm{rg}_p(\widetilde{\mathcal{E}}_k) - 1$$

Enfin, lorsque F contient μ_p, on a l'égalité

$$\mathrm{rg}_p(\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F) = \mathrm{rg}_p(WK_{2i}^{\acute{e}t}(F)).$$

On obtient donc, dans le même esprit que la proposition 4.3.6 (mais en plus précis), une minoration du p-rang des noyaux sauvages.

Le cas CM

Pour finir, on se place dans le cadre suivant. Soit E un corps à conjugaison complexe et F le sous corps totalement réel de E. Posons $\Delta := \mathrm{Gal}(E/F)$. Pour tout $\mathbb{Z}_p[\Delta]$-module A, on note A^+ (resp. A^-) la composante réelle (resp. imaginaire) de A.

Pour simplifier, on pose $i = 1$.

Pour les corps à multiplication complexe, on dispose du principe général du *Spiegelungsatz* de Leopoldt qui compare les parties "plus" et "moins" (cf. par exemple [Ko2, Theorem 3.5] ou [JMi, Proposition 6]). Dans le cadre des noyaux sauvages, cela donne l'inégalité suivante :

$$0 \leq \dim_{\mathbb{F}_p}(WK_2^{\acute{e}t}(E)/p)^+ - \dim_{\mathbb{F}_p}(WK_2^{\acute{e}t}(E)/p)^- \leq [F : \mathbb{Q}] = r_2(E).$$

On remarque que si le noyau sauvage satisfait l'inégalité 4.3.2 alors nécessairement la partie imaginaire $WK_2^{\acute{e}t}(E)^-$ n'est pas triviale.

En fait, comme le montre la proposition suivante, cette condition est suffisante pour montrer que $\mathcal{G}'_\infty$ n'est pas pro-p-libre.

Proposition 4.3.9. *Soit E un corps CM contenant μ_p et tel que $\mu(X'_\infty) = 0$. Si $WK_2^{ét}(E)^- \neq 0$ alors le groupe $\mathcal{G}'_\infty$ n'est pas pro-p-libre.*

Démonstration. L'hypothèse $WK_2^{ét}(E)^-$ non trivial montre que F admet une extension localement cyclotomique, disjointe de F_∞. On a donc

$$\dim_{\mathbb{F}_p}(\mathrm{Gal}(L_0/E)^+) \geq 2.$$

Il suffit ensuite de prendre la partie $+$ de la suite exacte :

$$0 \to K_3^{ét}(E)/p \to H^1(G_E^S, \mu_p) \otimes \mu_p \xrightarrow{\delta} {}_pK_2^{ét}(\mathcal{O}_E^S) \to 0,$$

en considérant le fait que $(K_3^{ét}(E)/p)^+$ est cyclique.
Le raisonnement est alors le même que dans la proposition 1.2.9 : il existe un élément de $H^1(G_E^S, \mu_p)\otimes\mu_p$ qui n'est pas dans $K_3^{ét}(E)/p$ et qui se trivialise par restriction dans $H^1(G_{L_0}^S, \mu_p) \otimes \mu_p$. Cet élément s'envoie donc sur un élément non nul de $\mathrm{Cap}_i(L_0/F)$. Enfin le théorème 4.2.8 permet de conclure. □

Corollaire 4.3.10. *Soit E un corps CM, contenant μ_p et tel que $\mu(X'_\infty) = 0$. Supposons qu'au moins une place p-adique se ramifie totalement dans E_∞/E, et que F admet une extension non-ramifiée et p-décomposée (i.e. $A'_F \neq 0$). Alors le groupe $\mathcal{G}'_{E_\infty}$ n'est pas pro-p-libre.*

La proposition précédente est immédiate si l'on suppose que F satifait la conjecture de Greenberg en p. Cette conjecture postule en effet la trivialité de l'invariant $\lambda(X'_\infty)^+$ (i.e. $(X'_\infty)^+$ est un $\mathbb{Z}_p$-module *fini*).
En passant à la partie "moins" dans l'isomorphisme

$$WK_2^{ét}(E)/p \simeq (X'_\infty \otimes \mu_p)_\Gamma,$$

on remarque que $WK_2^{ét}(E)^- \neq 0$ entraîne la non nullité $(X'_\infty)^+$. La conjecture de Greenberg entraine que $(\mathcal{G}'_{E_\infty})^{ab}$ contient un sous-groupe fini *non nul.* Ainsi $\mathcal{G}'_{E_\infty}$ n'est pas pro-p-libre.

4.4 Sur la dimension cohomologique de $\mathcal{G}'$.

4.4.1 Généralités

Le corps de nombres F et le premier p étant fixé, l'objet de cette section est l'étude de la dimension cohomologique du groupe de Galois

$$\mathcal{G}' := \mathcal{G}'_F = \mathrm{Gal}(\mathcal{L}'_{F_\infty}/F).$$

On se ramène à l'étude de $\mathcal{G}'_\infty$ et à ce qui a été fait dans la section précédente au moyen de l'extension de pro-p-groupes :

$$0 \to \mathcal{G}'_\infty \to \mathcal{G}' \to \Gamma \to 0,$$

où $\Gamma := \mathrm{Gal}(F_\infty/F)$.

Soit A un $\mathcal{G}'$-module discret et de p-torsion, on a d'une part la suite exacte courte :

$$0 \to H^1(\Gamma, H^1(\mathcal{G}'_\infty, A)) \to H^2(\mathcal{G}', A) \overset{\mathrm{res}}{\to} H^2(\mathcal{G}'_\infty, A) \to 0, \qquad (4.4.1)$$

qui se déduit de la suite spectrale de Hochschild-Serre.

D'autre part, on a l'inégalité entre les dimensions cohomologiques :

$$\mathrm{cd}(\mathcal{G}') \leq \mathrm{cd}(\mathcal{G}'_\infty) + 1.$$

Lorsque $\mathcal{G}'_\infty$ est pro-p-libre, on obtient donc $\mathrm{cd}(\mathcal{G}') \leq 2$. De plus, si F satisfait la conjecture de Gross en p alors $\mathrm{cd}(\mathcal{G}')$ est égale à 1 si et seulement si $\mathcal{G}'_\infty$ est nul (et dans ce cas $\mathcal{G}' \simeq \mathbb{Z}_p$).

Dans le cas où $\mathcal{G}'_\infty$ est pro-p-libre et non nul, il reste deux possibilités pour la dimension cohomologique stricte de $\mathcal{G}'$:

$$\mathrm{scd}(\mathcal{G}') = 2 \text{ ou } 3.$$

La proposition suivante permet de trancher :

Proposition 4.4.1. *Soit F un corps de nombres tel que toute p-extension localement cyclotomique de F satisfait la conjecture de Gross en p. Les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) Le groupe $\mathcal{G}'_\infty$ est pro-p-libre.
(ii) Le groupe $H^2(\mathcal{G}', \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ est trivial.
(iii) $scd(\mathcal{G}') = 2$ et $\mu(X'_\infty) = 0$.

Démonstration. La suite (4.4.1) pour $A = \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ nous donne la suite :

$$0 \to \left((X'_\infty)^\Gamma\right)^* \to H^2(\mathcal{G}', \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \to H^2(\mathcal{G}'_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \to 0.$$

Comme F satisfait la conjecture de Gross en p, le groupe $(X'_\infty)^\Gamma$ est fini.

Supposons (i). On a la trivialité de $(X'_\infty)^\Gamma$ et de $H^2(\mathcal{G}'_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ et donc celle de $H^2(\mathcal{G}', \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$. Le point (ii) est montré.
Etant donné un sous-groupe ouvert $\mathcal{H}'$ de $\mathcal{G}'$, notons $\mathcal{H}'_\infty := \mathcal{H} \cap \mathcal{G}'_\infty$. Les hypothèses de l'énoncé et (i) conduisent à la trivialité de $H^2(\mathcal{H}'_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ et $(\mathcal{H}'^{ab}_\infty)^\Gamma$. Ainsi $H^2(\mathcal{H}', \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = 0$ et le lemme suivant permettent de conclure.

Lemme 4.4.2. *Soit G un pro-p-groupe. Si pour tout sous-groupe ouvert H on a $cd(H) = 2$ et $H^2(H, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = 0$, alors* $\mathrm{scd}(G) = 2$.

Montrons rapidement ce lemme. Puisque $H^2(H, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = 0$, on a l'injection $H^2(H, \mathbb{Z}) \hookrightarrow H^2(H, \mathbb{Q}) = 0$. Ainsi $H^2(H, \mathbb{Z})\{p\} = 0$ et [Se2, I.3 Corollary 4.] permettent de conclure.

Pour finir, montrons que (iii) implique (i). Sous l'hypothèse $\mu = 0$, on a la finitude de $H^1(\mathcal{G}'_\infty, \mathbb{Z}/p)$. Ainsi, d'après [Se2, I.3 Proposition 22] la dimension cohomologique $cd(\mathcal{G}'_\infty)$ est égale à 1. $\square$

Remarques. L'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ ne nécessite que la conjecture de Gross pour F et l'implication $(iii) \Rightarrow (i)$ ne nécessite pas de supposer cette conjecture.

On s'intéresse pour finir au *nombre minimal de relations* du groupe $\mathcal{G}'$.

Définition 4.4.3. *Soit G un pro-p-groupe. On appelle nombre minimal de relations de $\mathcal{G}'$ le nombre (éventuellement $+\infty$)*

$$r(G) = \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(G, \mathbb{Z}/p).$$

Le nombre $r(\mathcal{G}')$ a déja été étudié par de nombreux auteurs (notamment en lien avec la finitude de la tour localement cyclotomique). J.-F. Jaulent et C. Maire donnent une majoration de celui-ci (cf. [JM2, Corollaire 1.2]).

Proposition 4.4.4. *On a l'inégalité*

$$\mathrm{rg}_p(\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F)_{tors} \leq r(\mathcal{G}') \leq rg_p\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F + r_1(F) + r_2(F) + \delta,$$

où δ vaut 1 si F contient μ_p et 0 sinon.
Supposons que toute p-extension localement cyclotomique de F satisfait la conjecture de Gross en p. Alors $r(\mathcal{G}')$ atteint le minimum si et seulement si $\mathcal{G}'_\infty$ est pro-p-libre.

Démonstration. Considérons la suite exacte courte :

$$0 \to H_2(\mathcal{G}', \mathbb{Z}_p)/p \to H_2(\mathcal{G}', \mathbb{Z}/p) \to_p H_1(\mathcal{G}', \mathbb{Z}_p) \to 0.$$

La minoration de $r(\mathcal{G}')$ provient simplement de la surjection dans la suite précédente. La majoration est démontrée dans [JM2].
Le nombre $r(\mathcal{G}')$ est minimal si et seulement si $H_2(\mathcal{G}', \mathbb{Z}_p)/p$ est nul. Comme $H_2(\mathcal{G}', \mathbb{Z}_p)$ est un pro-p-groupe, le lemme de Nakayama nous dit alors qu'il est nul. La proposition 4.4.1 permet de conclure. □

Nous avons caractérisé la trivialité du Λ-module $H_2(\mathcal{G}'_\infty, \mathbb{Z}_p)$. Nous avons exhibé des corps pour lesquels ce module n'est pas nul, mais on ne possède en général pas beaucoup plus d'informations. Cependant, on déduit de la proposition 4.4.4 le résultat suivant :

Corollaire 4.4.5. *Le Λ-module $H_2(\mathcal{G}'_\infty, \mathbb{Z}_p)$ est de type fini.*

Démonstration. Partons de la suite exacte duale de la suite 4.4.1 pour $A = \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$. On obtient une injection :

$$H_2(\mathcal{G}'_\infty, \mathbb{Z}_p)_\Gamma \hookrightarrow H_2(\mathcal{G}', \mathbb{Z}_p).$$

Le Λ-module $H_2(\mathcal{G}'_\infty, \mathbb{Z}_p)$ est compact. Pour conclure, il suffit donc de montrer que $H_2(\mathcal{G}'_\infty, \mathbb{Z}_p)_\Gamma$ est de type fini sur $\mathbb{Z}_p$. Ainsi, il suffit donc de voir que $H_2(\mathcal{G}', \mathbb{Z}_p)$ est de type fini sur $\mathbb{Z}_p$. On a l'injection :

$$H_2(\mathcal{G}', \mathbb{Z}_p)/p \hookrightarrow H_2(\mathcal{G}', \mathbb{Z}/p).$$

Or, d'après 4.4.4, le nombre minimal de relations du pro-p-groupe $\mathcal{G}'$ est fini. Ainsi $H_2(\mathcal{G}', \mathbb{Z}_p)/p$ est fini, ce qui achève la preuve. □

Exemple. Si F est un corps quadratique imaginaire tel que $(X'_\infty)^0$ est nul (c'est toujours le cas lorsque $p = 3$) alors $H_2(\mathcal{G}'_\infty, \mathbb{Z}_p)$ est nul ou pseudo-isomorphe à l'un des Λ-modules élémentaires suivants :

$$\Lambda \quad \text{ou} \quad \Lambda/(T^n), \text{ avec } n \geq 1.$$

Cela résulte de l'inégalité : $rg_p(H_2(\mathcal{G}'_\infty, \mathbb{Z}_p)_\Gamma) \leq 1$ qui s'obtient comme conséquence de la proposition 4.4.4 et de l'injection $H_2(\mathcal{G}'_\infty, \mathbb{Z}_p)_\Gamma \hookrightarrow H_2(\mathcal{G}', \mathbb{Z}_p)$.

4.4.2 Le théorème 94 logarithmique

Nous supposons toujours que le premier p est impair. Dans son traité sur les corps de nombres algébriques, D. Hilbert établit avec son théorème 94 le premier résultat de capitulation sur les classes d'idéaux. Il montre que dans une extension de corps de nombres L/F, non ramifiée et cyclique de degré p, il existe un idéal de F dont la classe est d'ordre p dans Cl_F et qui devient principal dans l'anneau des entiers de L.
La même question arrive naturellement dans le cadre du groupe des classes logarithmiques introduit par J.-F. Jaulent : dans une extension L/F cyclique de degré p et localement cyclotomique (ou *non logarithmiquement ramifiée*, c'est la même chose), le noyau de capitulation

$$\widetilde{\mathrm{Cap}}(L/F) := \ker(\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F \to \widetilde{\mathcal{C}\ell}_L)$$

est-il *toujours* non trivial ?

Dans [Br], l'auteur donne des exemples d'extensions L/F (avec $p = 2$) non logarithmiquement ramifiées et pour lesquelles $\widetilde{\mathrm{Cap}}(L/F)$ n'est pas nul. Dans le théorème suivant, nous montrons que la pro-p-liberté de $\mathcal{G}'_\infty$ se caractérise également en termes de trivialité du noyau $\widetilde{\mathrm{Cap}}(L/F)$ dans la famille des extensions localement cyclotomiques de F. C'est l'analogue exact du théorème 4.2.8 pour le twist $i = 0$. Ce théorème répond (sous Gross) à la question précédemment posée : il existe des corps de nombres pour lesquels $\widetilde{\mathrm{Cap}}(L/F) = 0$ pour toute extension L/F non-logarithmiquement ramifiée.

Théorème 4.4.6. *Soit F un corps de nombres tel que la conjecture de Gross en p est vraie pour toute extension localement cyclotomique de F.*
On a l'équivalence :

i) $\mathcal{G}'_\infty$ est pro-p-libre.

ii) L'invariant $\mu(X'_\infty)$ est nul et pour toute p-extension L/F localement cyclotomique, l'extension induit un isomorphisme

$$\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F \simeq (\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L)^G,$$

où $G = \mathrm{Gal}(L/F)$.

Démonstration. Sachant que $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L \simeq (X'_{L_\infty})_\Gamma$, la démonstration est identique à celle du théorème 4.2.8 avec $i = 0$. □

Dans l'étude du groupe $\mathcal{G}'_\infty$, le théorème 4.4.6 présente l'avantage que $\widetilde{\mathrm{Cap}}(L/F)$ est accessible par des méthodes algorithmiques.

Dans ce qui suit, nous allons montrer un résultat sur la capitulation des classes logarithmiques qui nous fournira un nouveau critère de non pro-p-liberté de $\mathcal{G}'_\infty$.
Le théorème 94 de Hilbert repose d'une part sur l'interprétation du noyau de capitulation du groupe de classes en termes de H^1 des unités et d'autre part sur le calcul du quotient de Herbrand de ces mêmes unités. Pour la version logarithmique, l'interprétation du groupe des classes logarithmiques en termes de H^1 d'unités logarithmiques reste valable. Cependant la trivialité du quotient de Herbrand de ces unités ne permet pas de conclure.

Désormais, nous supposons que la conjecture de Gross en p est vraie. Donnons quelques notations et résultats connus (pour plus de détails cf. [J2] et [J4]) :
– $\mathcal{E}'_F = \mathbb{Z}_p \otimes U'_F$: le p-adifié du groupe des p-unités.
– $\widetilde{\mathcal{E}}_F$: le groupe des unités logarithmiques.
Les deux sont reliés de la manière suivante :

$$\widetilde{\mathcal{E}}_F = \ker\left(\mathcal{E}'_F \to \widetilde{\oplus}_{\mathfrak{p}|p}\mathbb{Z}_p\right).$$

où l'application est induite par les valuations logarithmiques.

Remarque. Le groupe $\widetilde{\mathcal{E}}_F$ s'identifie au *noyau de Gross* $GK(F)$ dans la suite exacte de Sinnot (cf. l'appendice dans [FGS]) :

$$GK(F) \hookrightarrow \mathcal{E}'_F \to \widetilde{\oplus}_{v|p}\mathbb{Z}_p \to (\mathcal{G}'_{F_\infty})^{ab} \to A'_F.$$

Soit L/F une p-extension de corps de nombres de groupe de Galois G.

– si L/F est non ramifiée et p-décomposée alors

$$\begin{aligned} \mathrm{Cap}'(L/F) &:= \ker(A'_F \to A'_L) && (4.4.2)\\ &\simeq H^1(G, \mathcal{E}'_L). && (4.4.3) \end{aligned}$$

– si L/F est localement cyclotomique alors

$$\widetilde{\mathrm{Cap}}(L/F) \simeq H^1(G, \widetilde{\mathcal{E}}_L).$$

Nous avons alors la proposition suivante :

Proposition 4.4.7. *Soit F un corps de nombres ne contenant qu'une seule p-place et L/F une extension cyclique de degré p^n, non ramifiée et p-décomposée. Alors on a l'inégalité suivante :*

$$|\widetilde{\mathrm{Cap}}(L/F)| \geq \frac{|\mathrm{Cap}'(L/F)|}{p^n},$$

dès que L satisfait la conjecture de Gross en p.

Démonstration. Le calcul du quotient de Herbrand des p-unités nous donne :

$$\begin{aligned} |\hat{H}^0(G, \mathcal{E}'_L)| &= \frac{|\hat{H}^1(G, \mathcal{E}'_L)|}{p^n} \\ &= \frac{|\mathrm{Cap}'(L/F)|}{p^n}, \end{aligned}$$

D'autre part, le calcul (sous Gross) du quotient de Herband des unités logarithmiques nous donne :

$$\begin{aligned} |\hat{H}^0(G, \widetilde{\mathcal{E}}_L)| &= |\hat{H}^1(G, \widetilde{\mathcal{E}}_L)| \\ &= |\widetilde{\mathrm{Cap}}(L/F)|. \end{aligned}$$

Comme F admet une unique p-place, on a $\mathcal{E}'_F = \widetilde{\mathcal{E}}_F$ ainsi que les inclusions :

$$N_{L/F}(\widetilde{\mathcal{E}}_L) \subseteq N_{L/F}(\mathcal{E}'_L) \subseteq \widetilde{\mathcal{E}}_F.$$

On obtient ainsi l'inégalité :

$$|\frac{\widetilde{\mathcal{E}}_F}{N_{L/F}(\widetilde{\mathcal{E}}_L)}| = |\hat{H}^0(G, \widetilde{\mathcal{E}}_L)| \geq |\frac{\mathcal{E}'_F}{N_{L/F}(\mathcal{E}'_L)}| = |\hat{H}^0(G, \mathcal{E}'_L)|.$$

L'inégalité de l'énoncé se déduit alors immédiatement de l'inégalité précédente. □

Nous obtenons alors comme corollaire à la proposition précédente et au théorème 4.4.6 le critère suivant :

Corollaire 4.4.8. *Soit F un corps de nombres contenant une unique p-place et tel que toute extension localement cyclotomique de F satisfait la conjecture de Gross en p. Supposons qu'il existe une extension L/F non ramifiée, p-décomposée, cyclique de degré p et telle que*

$$\mathrm{rg}_p(\mathrm{Cap}'(L/F)) \geq 2.$$

Alors $\mathcal{G}'_\infty$ n'est pas un pro-p-groupe libre.

Démonstration. Si $\mathrm{rg}_p(\mathrm{Cap}'(L/F)) \geq 2$ alors $|\,\mathrm{Cap}'(L/F)| \geq p^2$ (c'est même équivalent puisque p annule $\mathrm{Cap}'(L/F)$). Donc d'après la proposition 4.4.7 le groupe $\widetilde{\mathrm{Cap}}(L/F)$ n'est pas trivial. Ainsi, d'après le théorème 4.4.6 le groupe $\mathcal{G}'_\infty$ n'est pas pro-p-libre. □

Ce critère est intéressant pour plusieurs raisons :

- Il est d'une certaine manière *optimal* : on dispose d'exemples de corps pour lesquels $\mathrm{Cap}'(L/F)$ est cyclique et le groupe $\mathcal{G}'_\infty$ est pro-p-libre (c'est le cas lorsque $X'_\infty \simeq \mathbb{Z}_p$).
- De nombreux auteurs (M. Ozaki, R. Sharifi, K. Wingberg...) se sont intéressés au groupe de Galois $\mathcal{G}_\infty$ sur F_∞ de la pro-p-extension non ramifiée maximale de F_∞. Tous les travaux récents semblent confirmer l'idée que ce groupe n'est pro-p-libre que lorsqu'il est isomorphe à $\mathbb{Z}_p$. Le critère précédent va dans ce sens pour le groupe $\mathcal{G}'_\infty$. En particulier, on pourrait espérer la chose suivante : pour un entier $n \geq 1$ et dès que $\mathrm{rg}_p(A'_n) \geq 2$ (i.e dès que $\lambda(X'_\infty) \geq 2$), un sous groupe de la forme $\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p$ est suceptible d'être un noyau de capitulation $\mathrm{Cap}'(L/F)$ (En particulier, c'est un noyau de transfert pour $\mathrm{Gal}(L/F)$, cf. [GruWe]). Ainsi, le groupe $\mathcal{G}'_\infty$ ne serait pas pro-p-libre dès que $\lambda(X'_\infty) \geq 2$.
- Il est facilement accessible par des méthodes numériques. C'est ce que nous montrons dans la section suivante.

4.5 Exemples numériques

L'objet de cette dernière partie est de mettre en oeuvre le corollaire 4.4.8 pour produire des exemples de corps F pour lesquels $\mathcal{G}'_\infty$ n'est pas pro-p-

libre.
La stratégie est la suivante :

1. on fixe un premier p ($p > 2$) ;
2. on se donne un corps de nombres F admettant une unique p-place et tel que $\mathrm{rg}_p(A'_F) \geq 2$;
3. on cherche une extension L/F non ramifiée, p-décomposée, cyclique de degré p ;
4. on calcule $C = |\operatorname{Cap}'(L/F)|$;
5. si $C \geq p^2$ alors G'_∞ n'est pas pro-p-libre (sous Gross, d'après 4.4.8). Si $C = p$, on reprend à l'étape 3 avec une extension L/F différente des précédentes ;
6. si le critère $C \geq p^2$ échoue pour toutes les extensions L/F, on reprend à l'étape 2 avec le corps F_1.

Pour le calcul du noyau de capitulation, on procède de la manière suivante. Le calcul du quotient de Herbrand des p-unités nous donnent l'égalité

$$|\operatorname{Cap}'(L/F)| = p|\hat{H}^0(G, \mathcal{E}'_L)|.$$

Il s'agit donc de calculer $|\hat{H}^0(G, \mathcal{E}'_L)|$. En pratique, nous allons faire ce calcul lorsque F est un *corps quadratique imaginaire* et dans lequel le premier p est inerte. Pour un tel corps, on a

$$\mathcal{E}'_F = p^{\mathbb{Z}_p},$$

d'où

$$|\hat{H}^0(G, \mathcal{E}'_L)| = |\frac{p^{\mathbb{Z}_p}}{N_{L/F}(\mathcal{E}'_L)}|.$$

On calcule une base $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_p$ du $\mathbb{Z}_p$-module $\mathcal{E}'_L/\mathcal{E}_L$, puis le sous-groupe

$$N := N_{L/F}(\mathcal{E}'_L) =< N_{L/F}(\epsilon_1), \ldots, N_{L/F}(\epsilon_p) > \subseteq p^{\mathbb{Z}_p}.$$

Comme $p^p \in N$, on a

$$|\operatorname{Cap}'(L/F)| = 1 \text{ ou } p.$$

Remarque. En pratique, les calculs sont réalisés avec les unités et p-unités classiques (et non les p-adifiés $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$).

On pose maintenant $p = 3$ et $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-m})$ avec $m \equiv 1 \bmod 3$ et $m \geq 3$ est sans facteur carré. Supposons que $\mathrm{rg}_3(A'_F) \geq 2$. Dans la suite, L désigne toujours une extension cyclique de degré 3 de F, qui est non-ramifiée et 3-décomposée.

Nous détaillons trois exemples dans le tableau ci-dessous. Tous les calculs sont réalisés avec PARI/GP.

m	Une équation de L/F	N
2437	$x^3 - 3000x + 1028000$	$< 27 >$
	$x^3 + 3000x + -4000\sqrt{-m}$	$< 27 >$
	$x^3 - 3000x + 37964000$	$< 27 >$
	$x^3 + 3x + 4\sqrt{-m}$	$< 27 >$
5857	$x^3 + 151959x + 198053230\sqrt{-m}$	$< 3 >$
	$x^3 + 151959x + 318911288\sqrt{-m}$	$< 3 >$
	$x^3 + 151959x + 563758200283712\sqrt{-m}$	$< 3 >$
	$x^3 - 3x - 2846500$	$< 3 >$
9934	$x^3 - 10328853x + 75972156766$	$< 3 >$
	$x^3 - 10328853x + 496904753504554706$	$< 27 >$
	$x^3 - 10328853x + 69275795019667656626$	$< 3 >$
	$x^3 - 3x - 918398302$	$< 3 >$

Pour $m = 2437$ et $m = 9934$, on a exhibé au moins une extension L/F tel que $|\,\mathrm{rg}_p\,(\mathrm{Cap}'(L/F))\,| \geq 2$. Ainsi, le corps F admet un groupe $\mathcal{G}'_\infty$ qui n'est pas pro-p-libre. Pour $m = 5857$, on ne peut pas conclure.

Nous avons réalisé ces calculs pour tous les corps F tels que $d \leq 150000$. Nous obtenons trois listes.

Liste 1 : 3886, 4027, 6583, 6910, 9385, 9574, 9934, 10015, 12013, 12067, 12118, 12394, 12481, 15049, 16627, 16870, 17131, 17146, 19651, 21418, 22711, 23605, 23683, 24109, 25447, 26305, 26962, 27355, 27649, 27991, 28279, 28477, 28759, 28945, 29569, 30430, 30466, 30994, 31081, 31246, 31462, 31639, 31999, 32137, 34027, 34507, 34603, 34687, 35353, 35539, 37213, 37219, 37237, 38278, 38806, 38926, 39802, 39877, 41614, 41671, 41698, 42577, 42619, 42859, 42901, 43198, 43957, 45397, 45835, 46033, 46753, 46198, 47017, 47878, 48049, 48634, 48667, 49837, 50293, 50983, 51142, 52021, 52858, 52906, 53341, 53782, 53839, 54190, 54319, 54853, 54931, 55486, 55546, 56773, 57079, 58105, 58213, 59182, 59221, 59293, 59578, 60895, 61771, 62527, 63010, 63079, 63103, 64063, 65014, 65203, 65407, 65686, 67054, 67255, 68314, 68626, 69721, 70330, 70606, 70930, 71938, 72034, 72805, 75790, 75841, 75847, 75913, 76645, 78181, 78223, 78730, 79066, 80233, 80242, 82183, 82702, 83149, 83341, 83578, 83890, 84145, 84454, 85489, 85741, 85858, 86422, 86551, 87727, 87979, 88447, 88558, 89017, 89197, 89269, 89641, 89686, 89923, 90163, 90313, 90898, 91402, 91471, 92515, 93067, 93154, 93445, 93823, 94498, 95155, 95869, 96817, 97063, 97555, 97687, 97801, 98281, 98347, 98443, 98605, 98773, 98929, 100342, 100630, 101839, 102733, 103567, 103627, 103663, 104002, 104107, 104659, 104857, 105061, 105910, 106213, 106282, 106663, 107491, 107722, 108433, 108877, 108886, 108910, 109285, 109441, 110059, 110719, 111130, 111490, 111538, 111697, 112069, 112573, 112795, 113218, 113713, 114049, 114127, 114403, 114445, 114730, 114743, 115357, 115447, 115837, 116083, 116278, 116419, 117454, 117757, 118582, 119191, 119698, 119839, 121045, 121201, 121321, 121534, 121546, 122659, 123901, 124231, 124486, 124771, 124894, 126979, 127510, 129001, 129754, 130453, 130597, 130759, 131086, 131281, 132286, 132301, 133018, 133555, 133753, 134059, 134266, 134830, 134989, 135442, 135982, 136501, 136555, 137266, 137833, 137953, 138463, 138505, 138769, 138826, 139570, 141481, 141541, 142114, 144037, 144754, 145090, 146494, 147721, 147853, 148093, 148561, 148597, 148729, 149011, 149749.

Liste 2 : 5857, 6085, 6226, 8242, 10798, 25009, 33082, 41365, 47482, 48802, 50281, 69070, 72946, 74086, 77281, 80746, 82774, 82834, 83395, 86542, 95977, 98746, 107419, 110986, 114043, 124045, 125158, 126973, 130783, 131758, 136381, 141613, 145033, 146815.

Liste 3 : 81394, 89134, 92827, 96766, 117043, 126886, 137587.

– La **liste 1** rassemble les entiers m pour lesquels on a trouvé au moins une extension L/F avec $|\operatorname{Cap}'(L/F)| = 9$.
– La **liste 2** rassemble les entiers m tels que $|\operatorname{Cap}'(L/F)| = 3$ pour toutes les extensions L/F.
– Les entiers de la **liste 3** sont ceux pour lesquels on a trouvé $|\operatorname{Cap}'(L/F)| = 3$ pour les extensions L/F que l'on a réussi à calculer, mais pour lesquels on a pas réussi à calculer toutes les extensions L/F.

Il résulte immédiatement du corollaire 4.4.8, la proposition suivante :

Proposition 4.5.1. *Pour tous les entiers m de la liste 1, le corps $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-m})$ admet un groupe $\mathcal{G}'_{F_\infty}$ qui n'est pas pro-3-libre.*

Remarques

– Pour les corps quadratiques imaginaires $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-m})$, l'abélianisé X'_{F_∞} est un $\mathbb{Z}_3$-module libre de rang λ'.
– Dans [O], M. Ozaki calcule la structure de $\mathcal{G}_{F_\infty}$ pour $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-m})$ avec $m = 2437, 3886$ et 4027 et montre, en particulier, que $\mathcal{G}_{F_\infty}$ n'est pas pro-

3-libre pour ces trois corps. Comme on a $X_{F_\infty} = X'_{F_\infty}$, en considérant l'extension de pro-3-groupes

$$0 \to H \to \mathcal{G}_{F_\infty} \to \mathcal{G}'_{F_\infty} \to 0,$$

on en déduit que $\mathcal{G}'_{F_\infty}$ n'est également pas pro-3-libre pour ces trois corps. On retrouve ainsi le résultat de la proposition 4.5.1 pour les trois premiers corps de la liste 1.

– Le critère utilisé s'applique à environ $87,4\%$ des corps F considérés.

Bibliographie

[As] J. Assim, *Analogues étales de la p-tour des corps de classes*, J. Théor. Nombres Bordeaux **15** (2003), no. 3, 651-663.

[AM] J. Assim & A. Movahhedi, *Bounds for étale Capitulation Kernels*, K-theory, **33** (2004), 199-213.

[Ba] G. Banaszak, *Generalization of the Moore exact sequence and the wild kernel for higher K-groups*, Compositio Math., **86** (1993), 281-305.

[Br] C. Brighi, *Capitulation des classes logarithmiques et étude de certaines tours de corps de nombres*, Thèse de l'Université Paul-Verlaine, Metz (2007).

[BMS] H. Bass, J. Milnor & J.-P. Serre, *Solution of the congruence subgroup problem for SL_n $(n \geq 3)$ and Sp_n $(n \geq 2)$*, Publ. Math. I.H.E.S. **33** (1967), 59-137.

[CW] Chase S.U. & W.C. Waterhouse, *Moore's theorem on uniqueness of reciprocity laws*, Inv. Math. **16** (1972), 267-270.

[DF] W. Dwyer & E. Friedlander, *Algebraic and étale K-theory*, Trans. Amer. Soc. **247** (1985), 247-280.

[FGS] L. Federer & B. H. Gross (with an appendix by W. Sinnott), *Regulators and Iwasawa modules*, Invent. Math. **62** (1981), 443-457.

[FW] B. Ferrero & L. Washington, *The Iwasawa invariant μ_p vanishes for abelian number fields*, Ann. Math. **109** (1979), 377-395.

[Ga] H. Garland, *A finiteness theorem for K_2 of a number field*, Annals of Math. **94** (1971), 534-548.

[GJ] M. Grandet & J.-F. Jaulent, *Sur la capitulation dans les $\mathbb{Z}_\ell$-extensions*, J. Reine Angew. Math. **362**, 213-217.

[GrJ] G. Gras & J.-F. Jaulent , *Sur les corps de nombres réguliers*, Math. Z. **202** (1989), no. 3, 343-365.

[Gri] R. Griffiths, *A Genus formula for étale Hilbert kernels in a cyclic p-power extension*, Thesis McMaster University, (2005).

[GruWe] K. W. Gruenberg & A. Weiss, *Capitulation and transfer kernels*, J. Théor. Nombres Bordeaux **12** (2000), 219-226.

[GS] E. Golod & I. Shafarevitch, *On class field towers*, Amer. Math. Soc. Transl. **48** (1965), 91-102.

[Iw1] K. Iwasawa, *On the μ-invariant of $\mathbb{Z}_p$-extensions*, Number Theory, Algebraic Geometry, and Commutative Algebra, in honour of Y. Akizuki, Tokyo (1973), 1-11.

[Iw2] K. Iwasawa, *On $\mathbb{Z}_\ell$-extensions of algebraic number fields*, Ann. Math. **98** (1973), 243-326.

[J1] J.-F. Jaulent, *L'arithmétique des ℓ-extensions (Thèse d'Etat)*, Pub. Math. Fac. Sci. Besançon, Théor. Nombres 1984-85 et 1985-86, (1986), 1-349.

[J2] J.-F. Jaulent, *L'état actuel du problème de la capitulation*, Sém. Théor. Nombres, Bordeaux (1987-1988).

[J3] J.-F. Jaulent, *Sur le noyau sauvage des corps de nombres*, Acta Arith. **67** (1994), no.4, 335-348.

[J4] J.-F. Jaulent, *Classes logarithmiques des corps de nombres*, J. Théor. Nombres Bordeaux **6** (1994), 301-325.

[J5] J.-F. Jaulent, *Théorie l -adique globale du corps de classes*, J. Théor. Nombres Bordeaux **10** (1998), 355-397.

[JM1] J.-F. Jaulent & C. Maire, *A propos de la tour localement cyclotomique d'un corps de nombres*, Abh. Math. Sem Hamburg 4 **70** (2000), 239-250.

[JM2] J.-F. Jaulent & C. Maire, *Radical hilbertien et tour localement cyclotomique*, Japan. J. Math. **28** (2002), no. 2, 203-213.

[JMi] J.-F. Jaulent & A. Michel, *Approche logarithmique des noyaux étales sauvages des corps de nombres*, J. Number Theory **120** (2006), no. 1, 72-91.

[JS] J.-F. Jaulent & F. Soriano, *Sur les tours localement cyclotomiques de corps de nombres.*, Archiv der Math. **73** (1999), 132-140.

[Ka] B. Kahn, *Descente galoisienne et K_2 des corps de nombres*, K-theory **7** (1993), 55-100.

[KC] K. Kramer et A. Candiotti, *On K_2 and $\mathbb{Z}_l$ extensions of number fields*, Amer. J. Math. **100** (1978), 177-196.

[Ke] F. Keune, *On the structure of the K_2 of the ring of integers in a number field*, K-theory **2** (1989), 625-645.

[Ko1] M. Kolster, *An idelic approach to the wild kernel*, Invent. Math. **103** (1991), no.1, 9-24.

[Ko2] M. Kolster, *Remarks on étale K-theory and Leopoldt's Conjecture*, Séminaire de Théorie des Nombres de Paris (91-92), Progress in Mathematics **116**, Birkhäuser 1993, 37-62

[Ko3] M. Kolster, *K-theory and arithmetic*, Contemporary developments in algebraic K-theory, ICTP Lect. Notes, XV, Abdus Salam Int. Cent. Theoret. Phys., Trieste, (2004).

[Ko4] M. Kolster, *Iwasawa Theory*, Chap.1, monographie.

[KM] M. Kolster & A. Movahhedi, *Galois co-descent for étale wild kernels and capitulation*, Ann. Inst. Fourier, **50** (2000), 35-65.

[KNF] M. Kolster, T. Nguyen Quang Do & V. Fleckinger, *Twisted S-units, p-adic class number formulas, and the Lichtenbaum conjectures*, Duke Math. J., **84**, No. 3, (1996), 679-717.

[Ku] L. V. Kuz'min, *The Tate module for algebraic number fields*, Math., USSR Izv.,**6**, No. 2 (1972), 263-361.

[LMN] M. Le Floch, A. Movahhedi & T. Nguyen Quang Do, *On capitulation cokernels in Iwasawa theory*, Amer. Journal of Mathematics, **127** (2005), 851-877.

[Ma] C. Maire, *Sur la dimension cohomologique des pro-p-extensions des corps de nombres*, J. Th. des Nombres de Bordeaux **17** fasc. 2 (2005), 575-606.

[Mo] A. Movahhedi, *Sur les p-extensions des corps p-rationnels*, Math. N. **149** (1990), 163-176.

[MN] A. Movahhedi & T. Nguyen Quang Do, *Sur l'arithmétique des corps de nombres p-rationnels*, Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1987-88, 155-200, Progr. Math. **81**, Birkhäuser Boston, 1990.

[N1] T. Nguyen Quang Do, *Sur la $\mathbb{Z}_p$-torsion de certains modules galoisiens*, Ann. Inst. Fourier **36**, no. 2, (1986), 27-46.

[N2] T. Nguyen Quang Do, *Analogues supérieurs du noyau sauvage*, Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, **4** (1992), 263-271.

[N3] T. Nguyen Quang Do, *K_3 et formules de Riemann-Hurwitz p-adiques*, K-Theory **7** (1993), no. 5, 429-441.

[N4] T. Nguyen Quang Do, *Théorie d'Iwasawa des noyaux sauvages étales d'un corps de nombres*, Publications Math. de la faculté des sciences de Besançon (2002).

[NSW] J. Neukirch, A. Schmidt& K. Wingberg, *Cohomology of number fields*, Springer Verlag, Berlin (2000).

[O] M. Ozaki *Non-abelian Iwasawa theory of $\mathbb{Z}_p$-extensions*, J. Reine Angew. Math. **602** (2007), 59-94.

[S] P. Schneider, *Über gewisse Galoiscohomologiegruppen*, Math.Z. **168**, 181-205 (1979).

[Se1] J.-P. Serre, *Corps locaux*, Hermann, Paris (1962).

[Se2] J.-P. Serre, *Galois Cohomology*, Lectures Notes in Math., Springer-Verlag, Berlin (1994).

[Sou] C. Soulé, *K-théorie des anneaux d'entiers de corps de nombres et cohomologie étale*, Invent. Math. **55** (1979), 251-295.

[Ta] J. Tate, *Relations between K_2 and Galois cohomology*, Invent. Math. **36** (1976), 257-274.

[Val1] R. Validire, *Capitulation for even K-groups in the cyclotomic $\mathbb{Z}_p$-extension.* soumis à publication.

[Val2] R. Validire, *Descente galoisienne pour les noyaux sauvages étales*, en préparation.

[Vau] D. Vauclair, *Cup produit, noyaux de capitulation étales et conjecture de Greenberg généralisée*, K-theory **36** (2005), 223-244.

[W] L.C. Washington, *Introduction to Cyclotomic Fields*, 2ème édition, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[We] C. Weibel, *Algebraic K-theory of rings of integers in local and global fields*, Handbook of K-theory. Vol. 1, 2, 139-190, Springer, Berlin, (2005).

[Wi] K. Wingberg, *On the maximal unramified p-extension of an algebraic number field* , J. Reine Angew. Math. **440** (1993), 129-156.

Capitulation des noyaux sauvages étales

Résumé : ce travail de thèse porte sur deux problèmes distincts, tous deux en lien avec le comportement galoisien de certains noyaux de localisation en cohomologie étale : *les noyaux sauvages étales*. Fixons un nombre premier p et F_∞ une $\mathbb{Z}_p$-extension d'un corps de nombres F.
La structure de groupe abélien du p-groupe des classes des étages de F_∞/F est *asymptotiquement* bien connue : nous montrons, au moyen de la théorie d'Iwasawa des $\mathbb{Z}_p$-extensions, un analogue de ce résultat en K-théorie supérieure.
Dans un deuxième temps, nous étudions le groupe de Galois $\mathcal{G}'_\infty$ sur F_∞ de la pro-p-extension, non ramifiée, p-décomposée maximale de F_∞, lorsque F_∞ est la $\mathbb{Z}_p$-extension *cyclotomique* de F. Après avoir établi un lien entre la structure de $\mathcal{G}'_\infty$ et le comportement galoisien des noyaux sauvages étales, nous donnons divers critères effectifs de non pro-p-liberté pour $\mathcal{G}'_\infty$.

Mots clés : théorie algébrique des nombres, théorie d'Iwasawa, K-théorie, cohomologie étale, noyaux sauvages, capitulation, pro-p-groupe libre.

Capitulation for Étale Wild Kernels

Abstract : this thesis deals with two distinct issues, both related with the Galois behavior of some localisation kernels in étale cohomology : *the étale wild kernels*. Let p be a prime number and F_∞ be a $\mathbb{Z}_p$-extension of a number field F.
The abelian group stucture of the p-class group of the large layers in F_∞/F is well-understood : using Iwasawa's theory of $\mathbb{Z}_p$-extensions, we generalize this result to the even K-groups of rings of integers.
The second part of the thesis is devoted to the study of the Galois group $\mathcal{G}'_\infty$ over F_∞ of the maximal unramified, p-decomposed, pro-p-extension of F_∞, when F_∞ is the cyclotomic $\mathbb{Z}_p$-extension of F. We highlight a link between the structure of $\mathcal{G}'_\infty$ and the Galois behavior of the wild kernels. Then we give various explicit criterions to show that $\mathcal{G}'_\infty$ is not a free pro-p-group.

Keywords : algebraic number theory, Iwasawa theory, K-theory, étale cohomology, wild kernels, capitulation, free pro-p-group.

Laboratoire d'accueil : XLIM-DMI, UMR CNRS 6172. 123, avenue Albert Thomas, 87060 Limoges Cedex.